Veterinární a farmaceutická univerzita Brno

Základy statistiky

pro studující veterinární medicíny a farmacie

Doc. RNDr. Iveta Bedáňová, Ph.D.
Prof. MVDr. Vladimír Večerek, CSc.

Brno, 2019

Obsah

Úvod

Statistika je disciplinou, která dnes tvoří nezbytnou součást studia všech biologických oborů a oborů navazujících na biologii – tj. především lékařských oborů, ať už humánní medicíny nebo medicíny veterinární, dále farmaceutických oborů, zemědělských, ekologických, hygienických, potravinářských a řady dalších. Význam této aplikované statistiky (biostatistiky) vyplývá z podstaty získávání, zpracování, prezentace a interpretace dat v biologických a lékařských oborech, kdy bez uplatnění statistiky by vznik mnohých lékařských znalostí a zkušeností byl zatížen řadou chyb a omylů, a kdy bez znalosti statistiky by znalost i zkušenost nemohla být správně interpretována.

Praktický dopad významu statistiky pro studenty veterinární medicíny a farmacie se promítá především do oblasti výzkumu a vývoje v lékařských a farmaceutických oborech, ale i do oblasti klinické veterinární praxe a oblasti hygieny a ekologie při dozoru nad potravinami živočišného původu. Výuka statistiky na VFU Brno je zaměřena zejména na schopnost studentů samostatně řešit konkrétní problémy veterinární medicíny a farmacie s využitím metod biostatistiky a dále na praktické zvládnutí některých obecných i speciálních postupů obsluhy osobních počítačů při jejich využití pro statistické úlohy.

Text této publikace je určen především studentům veterinární medicíny a farmacie na Veterinární a farmaceutické univerzitě Brno, ale může být užitečnou pomůckou i pro ostatní zájemce o statistiku v oblasti biologických a lékařských oborů. Nepředpokládá žádné předchozí znalosti statistických a matematických postupů a může sloužit jako základní učebnice biostatistiky, protože představuje základní statistické pojmy a vysvětluje statistické metody a jejich použití formou, která je přístupná i nematematicky orientovaným čtenářům. Zvláštní důraz se v tomto textu klade na srozumitelnost a praktické použití jednotlivých metod. Tomu poněkud ustupuje na některých místech přesnost matematickostatistické termonologie a symboliky.

Obsah je rozdělen do 10 kapitol. Úvodní kapitoly jsou věnovány vysvětlení základních statistických pojmů, výpočtům nejužívanějších statistických charakteristik a popisu nejdůležitějších teoretických rozdělení používaných v tomto textu. Navazující kapitoly se věnují popisu, vysvětlení a praktickému uplatnění nejčastěji používaných statistických testů (parametrických i neparametrických) a dále metod statistické analýzy korelačních závislostí biologických znaků. Závěrečná kapitola je zaměřena na statistické hodnocení kvalitativních (kategoriálních) dat používaných v lékařské a biologické statistice. Všechny metody jsou doplněny názornými příklady pro demonstraci praktického uplatnění popisovaných postupů, které lze často zpracovat pouze za použití běžných elektronických kalkulaček. V současné době je však většinou řada statistických analýz prováděna za pomoci specifického softwaru a proto je učební text na závěr doplněn i řadou odkazů na www zdroje pro vhodný volně dostupný i komerční statistický software, který neklade na biologicky orientované odborníky přehnané nároky v oblasti vlastních statistických výpočtů.

Doufáme, že tento učební text bude i přes svou stručnou formu sloužit jako užitečná pomůcka nejen studentům veterinární medicíny a farmacie, ale i dalším případným zájemcům o statistiku v oblasti biologických a lékařských oborů.

Brno, srpen 2007 Autoři

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Pojem statistika

Objasnění pojmu statistika je poměrně obtížné, přestože v současné době snad každý něco o statistice ví, a má tedy o ní nějakou představu. V běžné řeči se slovem statistika často míní znázorňování číselných údajů přehlednou formou – pomocí grafů či tabulek. V této podobě se s ní setkáváme např. v masových médiích v souvislosti s volbami, různými anketami a průzkumy veřejného mínění nebo ve zprávách o vývoji ekonomiky. Jindy článek v novinách hovoří o statistickém prokázání, že kouření způsobuje rakovinu. V odborném časopisu se lékaři dovídají o posledních studiích, jež dokazují hypotézu, že např. nově objevený léčivý preparát je opravdu účinný při snižování hladiny cholesterolu v krvi. Je možné závěrům studie věřit? Co to je statistický důkaz?

V každé definici statistiky je obsaženo, že se zabývá hromadnými jevy. Jsou to takové skutečnosti, které se vyskytují mnohokrát a mohou se znovu opakovat. Obrovskou úlohu v procesu vznikání moderní statistiky v XIX. století sehrál belgický matematik, astronom a statistik Lambert Adolphe Jacques Quételet (1796-1874). Pěstoval statistiku jako disciplínu, která má nejenom pozorovat a popisovat hromadné jevy v sociální oblasti, ale má se je i snažit vysvětlovat v tom smyslu, že má podle příkladu přírodních věd hledat mezi nimi příčinné vztahy. Quételet se zasloužil nejenom o vývoj vědecké statistiky, ale i o velké obohacení statistické praxe. V Belgii, kde byl od roku 1841 předsedou statistického úřadu, se pod jeho vedením provádělo sčítání lidu s mnoha moderními prvky. Kromě Quételeta měly velký vliv na utváření statistiky v XIX. století i jiné osobnosti, jako např. Němec Karl Knies (1821-1898) se spisem „Die Statistik als selbstandige Wissenschaft“ (Statistika jako samostatná věda), vydaným v roce 1850.

Postupně začalo docházet k popisování a analyzování hromadných jevů pomocí čísel i v oblastech přírodních a technických, zvláště pak v biologii, antropologii, meteorologii, fyzice apod. Na rozvoji statistiky ve XX. století se podílela dlouhá řada velmi významných vědců, např. Francis Galton (1822-1911), který položil základy zkoumání vztahů mezi hromadnými jevy, dále Karl Pearson (1857-1936), který zkonstruoval řadu originálních statistických měr a postupů, Ronald A. Fisher (1890-1962), který se významně zasloužil zejména o rozvoj testování statistických hypotéz a dále William S. Gosset („Student“, 1876-1937), který vyvinul neparametrickou statistiku pro situace, kdy nelze předpokládat normální rozdělení dat. Činnost těchto vědců, jejich dalších současníků a následovníků vedla k tomu, že se na přelomu tisíciletí pod pojmem **statistika rozumí nauka, jak získávat informace z numerických dat**. Je to disciplína, která pomáhá při přípravě a provedení výzkumu a při vyhodnocování výsledků. Jako nástroj vědy, poskytuje statistika prostředky a koncepty, které umožňují pracovat s výsledky tak, abychom porozuměli určitému problému.

V užším slova smyslu je možno pod pojmem **statistika** rozumět:

a) *údaje* (data) zejména *číselné* (ale i slovní) a *jejich souhrny o hromadných jevech*, které najdeme v nejrůznějších statistických publikacích, ale zvláště v různých statistických ročenkách a v přílohách statistických časopisů;

b) *činnost spočívající v získávaní dat o hromadných jevech* (počítání, měření, vážení a zaznamenávání), v jejich *roztřiďování, shrnování, grafickém znázorňování, v konstrukci a výpočtu jejich charakteristik, ve vytváření jejich soustav a v jejich zveřejňování* a zejména pak *v jejich analýze*;

c) *věda, která zkoumá zákonitosti* (podstatné pravidelnosti) *hromadných jevů*, resp. *souhrn vědeckých metod sběru, zpracování* (třídění, shrnování a zpřehledňování) a *analyzování dat* (včetně vytváření závěrů a rozumných rozhodnutí na základě takového rozboru).

Podle významného didaktika statistiky Davida S. Moora (1997) můžeme praxi statistiky rozdělit na tři části: získávání dat, analýzu dat a statistické usuzování.

Získávání dat zahrnuje metody pro sběr dat, jež zodpoví předem danou otázku (hypotézu). Základní přístupy k výběru měřených objektů, k návrhu experimentů a k validizaci instrumentů pro získávání dat jsou významným příspěvkem statistiky.

Analýza dat představuje organizaci dat a popis dat prostřednictvím grafů, numerických souhrnů a dalších matematicky propracovaných prostředků. Někdy se této oblasti říká popisná statistika. Tento název je trochu zkreslující. Moore zdůrazňuje explorační funkci této části statistiky a její dynamickou povahu. Počítačová revoluce vrátila popisnou a explorační analýzu dat do centra statistické praxe.

Statistické usuzování (inference, indukce) jde za sama data a usiluje o získání závěrů o širším univerzu jevů. Neprovádí jenom závěry, ale dodává k nim i zhodnocení, jak jsou tyto závěry spolehlivé. K tomu používá pravděpodobnostní pojmy. Tomuto způsobu práce s daty se říká také inferenční statistika. Metody této části patří k matematicky nejnáročnějším z celé statistiky. Význam statistického testování hypotéz nebo používání intervalů spolehlivosti je však nutné posuzovat v závislosti na oprávněnosti aplikace těchto metod, a ne podle jejich matematické složitosti.

Pro statistiku, aplikovanou na zkoumání hromadných jevů v oblasti biologických a navazujících věd, se používá termín **biostatistika**. Nutnost používání statistických metod v této oblasti je dána specifickými vlastnostmi a charakteristickými rysy biologického materiálu. Všechny životní procesy a projevy živých organismů jsou ve svém celku velmi složité a proměnlivé, obsahují mnoho vnitřních vzájemně působících sil a proto je jejich hodnocení často velice komplikované. Živé organismy se vyznačují značnou geneticky podmíněnou variabilitou, která působí řadu problémů při sledování, měření a získávání dat v experimentech s biologickými objekty a především při vyhodnocování těchto experimentů, intrerpretaci jejich výsledků a vyvozování závěrů. Problémy v této oblasti dokáže do určité míry vyřešit statistika, která umožní zohlednit velkou variabilitu biologického materiálu a v neposlední míře i prvek náhody, který je zde vždy přítomen a nelze ho při experimentech zcela vyloučit. Použití statistických metod je tedy při práci s biologickým materiálem vždy nezbytně nutné především při vyhodnocování výsledků získaných v experimentech a na jejich základě i a pro formulování obecně platných závěrů, které pravdivě vypovídají o sledovaných jevech.

Využití biostatistiky pro veterinární lékařství a farmacii:

1) Oblast výzkumu: vyhodnocení dat získaných v experimentech, např. při ověřování účinnosti nových léků, léčebných preparátů, medikovaných krmných směsí, ale i nových léčebných postupů a použitých metod atd. Statistické metody hodnocení jsou schopny potvrdit nebo vyvrátit hypotézy, které si v experimentech stanovíme (viz Kapitola 6 Statistické testování hypotéz).
2) Zobecnění poznatků z klinické praxe: vyhodnocování výsledků pozorování z klinické praxe – např. sledování a porovnávání výskytu onemocnění v různých skupinách lidí, zvířat, v regionech, obdobích apod. Sledujeme např. zvýšenou nemocnost v určitém chovu (resp. v regionu, v období) a po statistickém porovnání s nemocností v jiných chovech (resp. v jiném regionu, v období) můžeme usoudit, zda je pozorované zvýšení nemocnosti náhodné nebo je způsobeno jinými vlivy (např. změnou krmení, metodiky ošetřování, hygienickými podmínkami, ročním obdobím, infekcí atd.)?
3) Vyhodnocení laboratorních analýz, hodnocení a porovnání vzorků (oblast hygieny potravin, testování zdravotní nezávadnosti, kontrola výroby léčiv, ad.)
4) Publikování výsledků experimentálních prací v odborné a vědecké literatuře, diplomové, disertační práce, výzkumné zprávy ap. (obecně platné závěry experimentálních prací lze vyvozovat pouze na základě statistického vyhodnocení získaných dat).

1.2 Jev

Při konání pokusů a pozorování v přírodních vědách (biologii a medicíně) usilujeme zpravidla o to, abychom z výsledku pokusů nebo pozorování mohli vyslovit obecně platné závěry o zkoumaném předmětu. Proto od pokusů požadujeme reprodukovatelnost a pozorování provádíme na rozsáhlých souborech vzájemně rovnocenných objektů. V praxi postupujeme většinou tak, že si předem určíme nějaký pevný komplex podmínek, např. soubor pravidel pro provedení jistého pokusu (druh a kvalita zákroku, druh, stáří, váhu, pohlaví pokusných zvířat a další podmínky při biologickém experimentu) a pokusy nebo pozorování provádíme v rámci tohoto pevného komplexu podmínek. Můžeme tedy říci, že pokusy nebo jednotlivá pozorování jsou realizací předem daného pevného komplexu podmínek.

Každý proces probíhající v přírodě v daném okamžiku svého trvání se projevuje určitým výsledkem. Výsledek tohoto procesu (pokusu nebo pozorování) je označován jako **jev**. Soubor podmínek, za nichž proces probíhá, určuje jaký jev nastane. Jevy, které se vyskytují za určitých podmínek opakovaně ve velkém počtu (nastávají při nezávisle opakované realizaci pevného komplexu podmínek), jsou nazývány **hromadnými jevy** (např. hromadným jevem je chřipková epidemie v zimním období nebo výskyt určité choroby ve stáji dojnic).

Podle jistoty výskytu jevů lze hromadné jevy rozdělit na:

1) **deterministické jevy** – které za určitých podmínek nastanou s naprostou jistotou (jevy jisté), nebo nenastanou (jevy nemožné). Např. při opakovaném zahřívání vody na 100°C při tlaku 101,3 kPa je výsledkem vždy pára – hromadný jev **jistý**, výsledek voda – hromadný jev **nemožný**.

2) **náhodné jevy** – které za určitých podmínek mohou nastat, ale nemusí – hromadný jev **náhodný**. Náhodné jevy nelze před provedením pokusu nebo pozorování zcela přesně předvídat. Např. při chovu dojnic za určitých podmínek ve stáji je výsledkem vznik onemocnění dojnic (hromadný jev náhodný), protože výsledek je u několika dojnic onemocnění určitou chorobou, ostatní dojnice touto určitou chorobou nemocné nejsou. Tj. jev onemocnění dojnice určitou chorobou mohl nastat (a nastal, u několika dojnic choroba zjištěna byla), ale nemusel (a také nenastal, u ostatních dojnic choroba zjištěna nebyla).

Náhodnost jevu je dána tím, že kromě určitého pevného komplexu podmínek, za nichž proces (pokus nebo pozorování) probíhá (a směřuje k jevu), existují ještě další **nepodchycené podmínky (tzv. náhodní činitelé)**, které se vymykají jakékoli kontrole a ovlivňují proces tak, že výsledek nelze předem jednoznačně určit. Náhodné činitele představuje velké množství nepatrných vlivů, které obvykle podchytit nelze, které však průběh procesu ovlivňují, a tím i jeho výsledek (jev). Proto výsledky opakovaných pokusů nejsou vždy přesně stejné i když je pevný komplex podmínek jejich provádění co nejpečlivěji kontrolován. Podobně je tomu i při konání pozorování na rozsáhlých souborech vzájemně rovnocenných jedinců. Velké množství nepatrných individiálních odchylek pozorovaných jedinců tu opět způsobuje nepředvídatelné kolísání ve výsledcích pozorování. Např. při chovu dojnic je onemocnění dojnic určitou chorobou náhodný jev, který je ovlivňován nepodchycenými podmínkami, jako je kvalita krmení, mikroklima ve stáji, úroveň ošetřování apod.

Přestože nastání nebo nenastání určitého jevu je zcela náhodné, protože je ovlivňováno náhodnými činiteli, přesto výskyt náhodných jevů podléhá určitým zákonitostem. Na základě těchto zákonitostí lze pak předvídat výskyt určitého náhodného jevu. Odhad výskytu náhodného jevu má velký význam v humánní i veterinární medicíně. Např. odhad výskytu určité nemoci v určité lokalitě nebo v určitém období, odhad projevu určité nemoci a tím i možnost jejího rozpoznání, odhad úspěšnosti léčby určité nemoci apod.

1. 3 Statistický soubor

Jak již bylo uvedeno výše, statistika se zabývá hromadnými jevy, tedy takovými skutečnosti, které se vyskytují mnohokrát a mohou se znovu opakovat. V podstatě existují dva druhy hromadných jevů. Jeden z nich je výsledkem velkého počtu opakovaných pozorování (vážení, měření) určité vlastnosti jednoho objektu. Zde je konečným cílem jednak zjištění (nebo alespoň maximální přiblížení) skutečného stavu dané vlastnosti daného objektu, jednak posouzení přesnosti pozorovatele (váhy, měřícího přístroje apod.). Může jít např. o řadu meření extinkce roztoku o určité koncentraci při kalibraci fotometru nebo řadu měření tělesné výšky jedné určité osoby apod.

Častějším druhem hromadného jevu (na který soustředí hlavní pozornost biostatistika) je nějaká vlastnost určité množiny, sestávající z velkého počtu prvků (živých jedinců), z nichž každý má v nějaké míře danou vlastnost. Protikladem hromadného jevu je individuální jev, tj. jedno pozorování vlastnosti jednoho prvku. Hranice mezi individuálním a hromadným jevem není ostrá, takže hromadný jev nelze definovat přísně exaktně. Jde o pojem velmi relativní. Lze říci, že vlastnost jednoho až čtyř prvků není možno považovat za hromadný jev. Jde pouze o jeden až čtyři individuální jevy.

Na druhé straně lze na základě zkušeností konstatovat, že uvažuje-li se 30 a více prvků, může se zpravidla mluvit již o hromadných jevech, protože při tomto a vyšším počtu lze předpokládat, že to, co je ve zkoumaných vlastnostech prvků podstatné (pravidelné, společné, zákonité), zatlačí do pozadí a převáží to, co je u některých jednotlivých prvků náhodně individuální. Zkoumání vlastností pěti až necelých třiceti prvků tvoří jakousi přechodnou oblast mezi prostým popisem skupiny individuálních jevů a poodhalováním zákonitostí hromadných jevů.

Studium hromadných jevů předpokládá definování množiny prvků, z nichž každý má celou řadu vlastností, z nichž některé jsou u každého prvku dané množiny zcela stejné a jiné se u jednotlivých prvků mohou vyskytovat v různé míře. Jsou-li identické vlastnosti prvků určité množiny přesně stanoveny, mluví se o dané množině, vytvořené z prvků s těmito přesně stanovenými shodnými vlastnostmi jako o ***statistickém souboru***. Statistickým souborem v oblasti biostatistiky může být např. množina zvířat, lidí, buněk, rostlin, mikroorganismů apod. Prvky statistického souboru jsou individuálními nositeli vlastností daného statistického souboru. Počet členů v souboru se nazývá *rozsah* daného statistického souboru.

Ke statistickému souboru lze přistupovat jako k základnímu nebo jako výběrovému.

Základní soubor (neboli populace) je soubor všech prvků (jedinců), u nichž se sledovaný znak může vyskytovat. Tento soubor je vlastním cílem statistického zkoumání. Obsahuje teoreticky všechny hodnoty, které mohou být při sledování dané vlastnosti teoreticky získány. Tzn. jde o oblast zkoumání, kterou chápeme jako souhrn hodnot, které tuto oblast tvoří. Počet členů v základním souboru (**rozsah**) označujeme ***N***. Tento rozsah může být konečný i nekonečný – především z časového hlediska**:**

a) konečný – kdy oblast zkoumání je přesně vymezena, např.: počet dojnic ve určité stáji, kde sledujeme hladinu močoviny v krevním séru zvířat nebo počet absolventů VFU v roce 2002 (počet členů *N* u takové populace je přesně stanovitelný).
b) nekonečný – kdy oblast zkoumání je vymezena prakticky nekonečně, případně ji nelze vymezit časově. Např.: počet všech prasat v Evropě (ve světě), kde sledujeme hmotnost nebo počet absolventů VFU (počet členů *N* je proměnlivý, nelze ho přesně zjistit).

Z praktického hlediska je rozsah základního souboru pro potřeby statistického zpracování (výpočetní vzorce) vždy uvažován a označován jako $\boldsymbol{N=\infty}$**.**

Protože populace má zpravidla velmi značný rozsah, zjištění zkoumaných vlastností u všech jejích členů nebývá mnohdy prakticky vůbec uskutečnitelné nebo bývá nesmírně pracné a velmi nákladné. Proto se většinou dané sledování (měření, experiment) provede jen u vybraných jedinců ze základního souboru, kteří jsou pouhou částí populace, tj. pouze jakýmsi jejím vzorkem - tvoří tzv. výběrový soubor.

Výběrový soubor (výběr) je soubor určitého **počtu *n*** jedinců vybraných ze základního souboru, u kterých je provedeno praktické sledování (měření) zkoumané vlastnosti (případně proveden experiment). Výběrový soubor by měl být co nejlepším představitelem (reprezentantem) základního souboru, neboť právě na základě poznání vlastností výběrového souboru se usuzuje na vlastnosti celé populace („statistická indukce“ – vyvozování závěrů). Aby byl výběrový soubor dostatečně reprezentativní, je nutno provádět výběr členů do tohoto souboru *náhodně*.

Náhodný výběr znamená, že jedinci souboru (naměřené hodnoty) byly vybrány nezávisle tak, aby všichni jedinci základního souboru (hodnoty, které jsou k dispozici) měly stejnou možnost být do výběru zahrnuty. Absolutně náhodný výběr ze základního souboru do výběrového souboru neexistuje. Náhodnost výběru je vždy ovlivněna určitou chybou při vybírání. K vybírání se proto používají způsoby, které chybu při vybírání zmenšují co nejvíce. Nejlépe se náhodnosti dosáhne při výběru s použitím tabulky náhodných čísel (viz Příloha: Tab. č.1 Náhodná čísla).

Tabulky náhodných čísel obsahují číslice 0 až 9 seřazené náhodným způsobem, tj. nezávisle za sebou. Tabulky náhodných čísel bývají sestaveny pomocí nějakého znáhodňovacího procesu, který produkuje všechny číslice se stejnou pravděpodobností a nezávisle na předchozích výsledcích. Jsou to např. losování z osudí aj. Každá tabulka náhodných čísel se po jejím sestavení podrobuje řadě zkoušek, zda neobsahuje nějaké nenáhodnosti, jako je například příliš častý výskyt některé číslice, (tabulky náhodných čísel mají obsahovat všechny číslice zhruba stejně krát), cyklické opakování některých čísel apod. Ani po těchto kontrolách nemusí být tabulky bezvadné, neboť náhodnost mohla být porušena jiným (nekontrolovatelným) způsobem. Univerzální test náhodnosti, který by prozkoumal náhodnost z hlediska všech jejich vlastností, neexistuje. Tabulky náhodných čísel se používají v případě, kdy je třeba dosáhnout náhodného seřazení a nebo, v případě, kdy je třeba zabezpečit náhodnost vybírání.

V tabulce náhodných čísel jsou tedy zjištěné hodnoty diskrétní náhodné veličiny nabývající hodnot 0,1,2,3,...,9, každé s pravděpodobností 0,1. Tato náhodná čísla lze seskupit do dvojic, trojic apod, čímž vzniknou hodnoty 00, 01, 02, 03,....,99 a každé se dosáhne s pravděpodobností 0,01, nebo hodnoty 000, 001, 002, 003,......,999 a každé se dosáhne s pravděpodobností 0,001. Náhodného výběru ze základního souboru se za pomoci tabulek náhodných čísel dosáhne např. takto: všechny hodnoty základního souboru, které jsou pro výběr k dispozici, se po řadě očíslují (0 až poslední hodnota základního souboru - např. 72). Do výběrového souboru se vezme zvolený počet "n" (např. $n = 5$) hodnot ze základního souboru, a to těch, jejichž čísla se shodují s posloupností prvých "n" náhodných čísel připadajících v úvahu počínaje od libovolného místa tabulky náhodných čísel.

Například: Z chovu 72 ovcí je třeba náhodně vybrat 5 zvířat k vyšetření. Zvířat v chovu se očíslují za sebou 0, 1, 2, 3,......72. Z tabulky náhodných čísel se postupně od libovolného místa (po řádcích nebo sloupcích) čtou postupně za sebou dvoumístná čísla, např.: od začátku 6. řádku: 02, 89, 08, 16, 94, 85, 23, 29. Do výběrového souboru k vyšetření se tedy zařadí zvířata ze základního souboru s pořadovými čísly 02, 08, 16, 53, 29. Čísla 89, 94, 85 a 83 se při výběru vynechají, protože ovce s takovými pořadovými čísly v základním souboru nejsou.

1.4 Statistický znak

V biologickém a medicínském výzkumu jsme odkázáni na zkoumání přírodních náhodných jevů. Zpravidla však nemůžeme zkoumat jevy jako takové, ale snažíme se vybrat znak, nebo skupinu znaků, které zkoumaný jev určitým způsobem popisují – projevují se určitými biologickými vlastnostmi u zkoumaných jedinců. Můžeme tedy říci, že **statistický znak** je odraz (označení) určité vlastnosti, kterou má v té či oné míře každý člen sledovaného souboru zkoumaných jedinců (statistického souboru). Mírou dané vlastnosti (statistického znaku) u každého člena souboru je ***hodnota*** (slovní nebo číselná) daného znaku. Těchto hodnot je pro daný statistický znak tolik, kolik členů patří do daného souboru zkoumaných jedinců. Počet hodnot jednoho statistického znaku je tedy roven rozsahu souboru. Každá jednotlivá hodnota se často nazývá též *pozorování*, protože je označením stupně dané vlastnosti (vyjádřené daným znakem) pozorovaného u každého člena souboru. Počet pozorování jednoho znaku je tak samozřejmě stejný s rozsahem souboru. Záznamy o hodnotách jednoho nebo více znaků v určitém statistickém souboru nazýváme statistickými údaji (daty).

O hodnotách statistického znaku ve smyslu vyjádření různého stupně sledované vlastnosti mluvíme jako o **obměnách** neboli **variantách** znaku. Pro každou jednotlivou hodnotu (variantu) znaku používáme označení x_i (hodnota naměřená u i-tého jedince v souboru). Daný statistický znak v daném smyslu může nabýt buď pouze jedné varianty, nebo častěji dvou či více variant. Takový znak, který nabývá v daném statistickém souboru pouze jedné varianty, se nazývá *shodný*. Je to tedy konstanta, která je obvykle součástí definice daného statistického souboru (např. znak „příslušnost ke sledovanému souboru pacientů“ nebo „příslušnost k danému chovu dojnic“). Obvykle statistické znaky nabývají více než jedné obměny. Např. znak „pohlaví“ nabývá dvou variant (samčí, samičí nebo mužské, ženské), znak „věk v letech“ nebo „tělesná hmotnost“ může nabývat mnoha různých obměn u sledovaných jedinců. Tyto statistické znaky, které nabývají v daném statistickém souboru více než jedné varianty, jsou proměnnými (variabilními) statistickými znaky. Stručně je nazýváme ***proměnné***. Ty jsou pak hlavním předmětem statistického zkoumání.

Proměnné (statistické znaky) lze klasifikovat podle velmi mnoha hledisek. Jako první se nabízí hledisko vyjádření hodnot proměnné slovy nebo určitými čísly. Podle něj členíme proměnné na ***slovní*** a ***číselné***. Slovní proměnné se někdy nazývají alfabetické, ale nejčastěji *kategoriální* (roztříděním členů statistického souboru podle takovéto proměnné vznikají totiž skupiny neboli kategorie). Číselné proměnné se jmenují *numerické*. Ve značné části odborné literatury (a také při praktickém využití) se kategoriální proměnné nazývají **kvalitativními** znaky a numerické proměnné bývají nazývány **kvantitativními** znaky.

Na klasifikaci proměnných (statistických znaků) na slovní a číselné úzce navazuje třídění podle hlediska typu vztahů mezi obměnami a hodnotami proměnných. Pomocí hodnot, kterých proměnná (statistický znak) nabývá, je možno **kvantifikovat** sledovanou vlastnost jedinců statistického souboru.

Podle stupně kvantifikace rozeznáváme čtyři **typy statistických znaků** podle toho, zda jsme u dvou hodnot znaků x_1 a x_2 schopni interpretovat jejich:

rovnost	$x_1 = x_2$
uspořádání	$x_1 < x_2$
rozdíl	$x_1 - x_2$
podíl	x_1 / x_2

Na základě tohoto hlediska tedy dostaneme následující skupiny znaků:

a) **znaky nominální** (od latinského slova nomen ve smyslu jméno, název, pojmenování) – znaky s nejnižším stupněm kvantifikace. Jsme u nich schopni interpretovat jen rovnost, případně nerovnost (znak je přítomen u daného jedince nebo není přítomen). O dvou hodnotách nominálního znaku lze tedy pouze konstatovat, že jsou buď stejné nebo že jsou různé (např. 2 jedinci mají různé pohlaví, ale nelze říci že by samčí pohlaví bylo více než samičí pohlaví nebo naopak). Nominální znaky mohou nabývat buď jen dvou možností projevu (**alternativní** nominální znaky – např. stav organismu: zdravý – nemocný, pohlaví: samčí - samičí) nebo více možností projevu (**množné** nominální znaky – barva očí: modrá – hnědá – šedá – zelená). Různé možnosti projevu nominálních znaků jsou často nazývány **kategoriemi** a pro nominální znaky se proto někdy používá také pojem **kategoriální data**.

b) **znaky ordinální** (od latinského slova ordatio ve smyslu pořadí) neboli **pořadové** znaky jsou ty, o jejichž obměnách lze nejen říci, že jsou různé, ale lze je jednoznačně seřadit od nejmenší varianty do největší (nebo naopak). Hodnoty těchto znaků tak vyjadřují vzestupné nebo sestupné uspořádání intenzity zkoumané vlastnosti a jsou určeny subjektivně hodnotitelem. Typickým příkladem je školní klasifikace nebo hodnocení pomocí bodů v různých soutěžích (degustace, bonitace apod.). Při klasifikaci určíme, že jedničkář je lepší než dvojkař, ale to neznamená, že je mezi nimi stejný výkonostní rozdíl jako mezi dvojkařem a trojkařem. Rozdíl dvou obměn nebo hodnot ordinálního znaku značí rozdíl v pořadí těchto obměn nebo hodnot. Toto srovnání hodnot pořadového znaku rozdílem má smysl a je plně postačitelné. Naproti tomu nemá smysl nebo je nadbytečné či klamné srovnání hodnot pořadového znaku podílem.

c) **znaky metrické** neboli **kardinální** (od latinského slova cardinalis, které má významy stěžejní, hlavní) jsou znaky s nejvyšším stupněm kvantifikace, dávají nejvíce informací z dat**.** Jsou to znaky, o jejichž dvou variantách lze říci nejen, že jsou různé (jako u nominálních znaků) a že je jedna z nich větší než druhá (jako u ordinálních znaků), ale lze i přesně změřit o kolik je jedna obměna větší než druhá. Kardinální znaky jsou vždy číselné - jsou interpretovány číselnou hodnotou naměřenou objektivním měřítkem. Vyjadřují přitom nejen seřazení (jako ordinální znaky), ale i velikost měřených vlastností členů daného statistického souboru. Metrickými neboli kardinálními znaky jsou např. tělesná hmotnost, objem plic, délka končetiny, koncentrace látky, aktivita enzymu, tělesná teplota apod.).

Kardinální znaky lze dále dělit na:

c_1**) - intervalové** znaky: jsme u nich schopni interpretovat rozdíl dvou hodnot. Stejný interval mezi jednou a druhou dvojicí hodnot vyjadřuje i stejný rozdíl v intenzitě zkoumané vlastnosti (např. rozdíl mezi teplotou 37 °C a 38 °C je stejný jeko mezi 38 °C a 39°C).

c_2) - **poměrové** znaky: mimo rozdílu jsme schopni interpretovat i podíl 2 hodnot (např. váží-li dospělý člověk 80 kg a dítě pouze 10 kg, můžeme smysluplně říci, že dospělý člověk je 8x těžší než dítě).

Podle typu znaků bychom také měli používat odpovídajících statistických metod. U nominálních znaků je namístě použití různých typů třídění a kontingenčních tabulek, u ordinálních znaků pořadových statistik a testů (koeficient pořadové korelace, mediány, neparametrické pořadové testy ad.). Většina statistických metod je zaměřena na znaky intervalové a poměrové, kde lze interpretovat aritmetický průměr, korelační koeficient a parametrické testy. Základní pravidlo pro použití statistických metod je následující:

Data znaků na vyšším stupni kvantifikace lze zpracovat metodami určenými pro nižší stupeň kvantifikace, ovšem za cenu ztráty informace. Opačný postup možný není, protože hrozí zanášením libovůle do konečných výsledků.

Podle tohoto pravidla je tedy možno použít metody primárně určené pro znaky s nižším stupněm kvantifikace v některých situacích i pro znaky s vyšším stupněm kvantifikace, ovšem za cenu ztráty informace z dat (takové použití je tedy vhodné pouze pro orientační hodnocení). Opačným způsobem to však nejde, tzn. u znaků s nižší kvantifikací nelze použít metod primárně určených pro znaky s vyšší kvantifikací. Tyto metody jsou totiž více přesné, proto vyžadují mnoho informací z dat a tyto informace u „nepřesných“ znaků s nižší kvantifikací nemáme.

Dalším důležitým kritériem třídění statistických znaků (proměnných) je **formální hledisko** – podle něj je možno rozlišit statistické znaky na:

a) **znaky nespojité** (**diskrétní**) – takové znaky, které nabývají jen určitých hodnot z nějakého reálného intervalu. Např.: počet mláďat ve vrhu, počet snesených vajec, počet nemocných v určitém období nebo lokalitě atd. (může být 1 jedinec, 4 jedinci, ale ne 1,5 jedince). Speciálním případem diskrétních znaků jsou znaky **alternativní**, nabývající pouze 2 hodnot: ano - ne, zdravý - nemocný, přežije - nepřežije.

b) **znaky spojité** – teoreticky mohou nabývat všech hodnot v rámci určitého reálného intervalu (tělesná hmotnost, výška, teplota, aktivita enzymu). Prakticky nemusí být „spojitost“ těchto znaků doslovná – „přesnost“ jejich hodnot závisí na měřítku použitém pro měření těchto znaků (např. hmotnost dojnic budeme měřit s přesností maximálně celých kg, nemá smysl měřit v menších jednotkách).

1.5 Náhodná veličina

Statistický znak zkoumaného náhodného jevu (např. experimentu) lze popsat pomocí veličiny (tj. projev znaku číselně vyjádřený). Tato veličina za určitých podmínek (tj. za určitých podchycených podmínek) vlivem náhodných činitelů (tj. vlivem určitých nepodchycených podmínek) nabývá různých hodnot. Označujeme ji proto pojmem náhodná veličina.

Náhodnou veličinu tedy můžeme definovat jako číselné vyjádření výsledku náhodného jevu – projevu kvantitativního nebo kvalitativního znaku, který je předmětem zkoumání.

Např.: Jednoduchým ukazatelem zdravotního stavu je tělesná teplota. Překročí-li tělesná teplota u člověka výrazně 37°C je to zpravidla neklamným ukazatelem nedobrého zdravotního stavu. Jednoduše zjistitelná náhodná veličina jako je tělesná teplota nás informuje o výskytu velmi složitého náhodného jevu – nemoci.

Přirozeně popis náhodného jevu pomocí snadno zjistitelných náhodných veličin skrývá v sobě značné nebezpečí jeho zploštění a musí se proto používat s největší opatrností. Komplikované přírodní jevy náhodného charakteru nemůžeme obvykle pomocí náhodných veličin zcela dokonale vyjádřit. Zdánlivé upřesnění vyšetřovaného jevu (nemoci) jeho převedením na číselné vyjádření pomocí náhodných veličin (teplota aj.) znamená někdy jeho podstatné ochuzení nebo zkreslení jeho obsahu a může vést i ke zcela nesprávným závěrům o původně zkoumaném jevu.

a) **Diskrétní (nespojitá) náhodná veličina** – taková, která může nabývat pouze jednotlivých hodnot (celých čísel) z konečného nebo nekonečného intervalu, tzn. může se měnit jen po skocích. Např. nespojitá náhodná veličina je počet narozených mláďat v králičím vrhu, počet nemocných zvířat ve stádě, počet snesených vajec ve snůšce, počet obilek v klase.

b) **Spojitá náhodná veličina** – taková, která může nabývat všech hodnot z konečného nebo nekonečného intervalu, tzn. může se měnit spojitě bez skoků. Např. spojitá náhodná veličina je tělesná hmotnost, teplota těla, koncentrace glukózy v krevním séru, objem nadojeného mléka, délka chlupu stříbrné lišky apod.

Spojitou náhodnou veličinu můžeme převést na nespojitou tak, že její průběh rozdělíme do intervalů a každý interval nebude reprezentovat nekonečně hodnot, jak je tomu u spojité náhodné veličiny, ale jen jedna hodnota, obvykle střední hodnota intervalu. Např. spojitou náhodnou veličinu dojivost dojnice nabývající všech hodnot, např. od 5 do 15 kg rozdělíme do intervalů 5-7 kg, 7-9 kg, 9-11 kg, 11-13 kg, 13-15 kg a tak získáme nespojitou náhodnou veličinu nabývající hodnot 6, 8, 10, 12, 14 kg.

Nespojitou náhodnou veličinu na spojitou obvykle nepřevádíme, protože bychom se mohli dopustit nemožných závěrů. Např. nespojitou náhodnou veličinu počet mláďat v králičím vrhu nelze převést na spojitou náhodnou veličinu, protože počet mláďat 5,35 ve vrhu je nemožný (0,35 mláděte nemůže nastat).

1.5.1 Rozdělení náhodné veličiny

Z praktického hlediska představuje náhodná veličina všechna data získaná měřením sledovaného statistického znaku v nějakém pozorování (experimentu). Prvním krokem při statistickém zpracování a vyhodnocení těchto dat (náhodné veličiny) bývá roztřídění a uspořádání naměřených hodnot do přehledné formy (variační řady, tabulky četností, grafy). Pojmem **variační řada** je označována řada všech hodnot (variant) náhodné veličiny, seřazených vzestupně nebo sestupně. Při opakovaném výskytu některých hodnot ve variační řadě používáme pojem **četnost varianty** (počet opakování dané hodnoty, frekvence hodnoty). Pro další popisnou charakteristiku zkoumané náhodné veličiny je možno dále použít „zhuštěnou“ formu vypočtených zpřehledňujících parametrů a statistik, které používáme pro stručný popis statistických souborů.

Přestože náhodná veličina nabývá různých hodnot vlivem náhodných činitelů, přesto výskyt hodnot náhodné veličiny podléhá určitým zákonitostem. Zákonitost výskytu hodnot náhodné veličiny vyplývá z rozdělení hodnot náhodné veličiny. **Rozdělení náhodné veličiny** vyjadřuje výskyt (četnost, frekvenci) hodnot náhodné veličiny v závislosti na dané hodnotě náhodné veličiny. To je důležité pro vytvoření představy, jak jsou různé hodnoty náhodné veličiny na číselné ose měřené veličiny rozmístěny. Naopak na základě znalosti rozdělení hodnot náhodné veličiny lze pak předvídat výskyt určité hodnoty náhodné veličiny.

Rozdělení četností se vyjadřuje poněkud rozdílným způsobem u diskrétních a spojitých veličin.

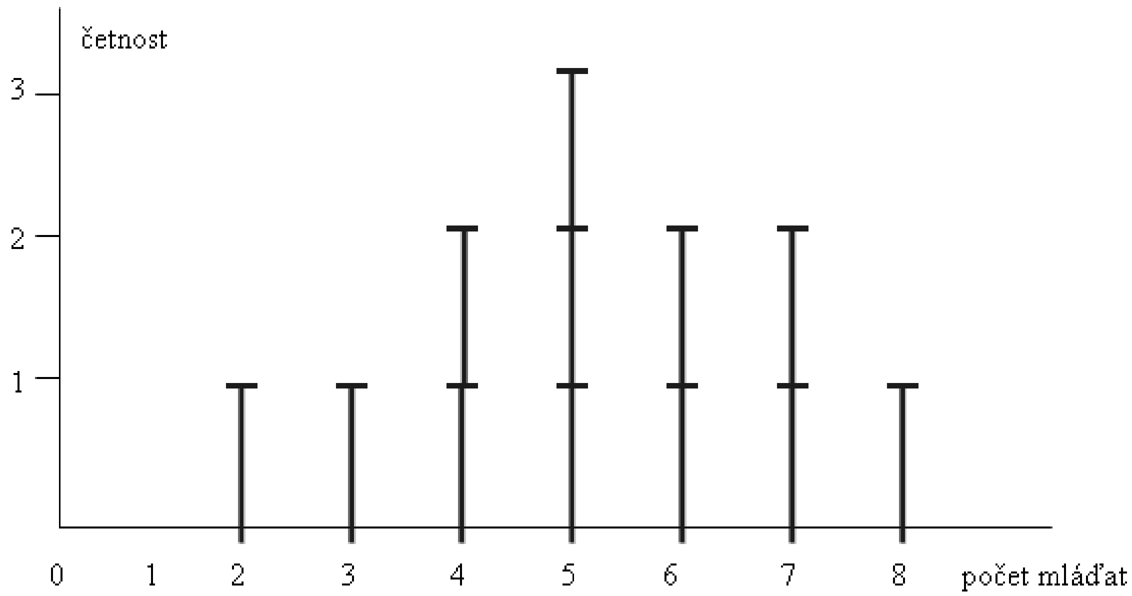
A) <u>Diskrétní (nespojitá) náhodná veličina</u> – nabývá jen určitých hodnot (nejčastěji celých čísel). Grafickým vyjádření rozdělení diskrétní náhodné veličiny je úsečkový graf rozdělení četností jednotlivých hodnot.

Např. při sledování počtu mláďat u výběrového souboru dvanácti vrhů králíků (n = 12) byly pozorovány následující počty mláďat, uspořádané do variační řady:

2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8

Příklad grafického vyjádření rozdělení četností této variační řady je zobrazen na obr. č. 1.1.

Obr. č. 1.1 Rozdělení četností diskrétní náhodné veličiny



B) **<u>Spojitá náhodná veličina</u>** – teoreticky může nabývat všech hodnot v rámci určitého reálného intervalu. Pro lepší přehlednost a zjednodušení takovéto spojité variační řady (hlavně u velkých souborů) se při grafickém vyjádření rozdělení spojité náhodné veličiny hodnoty této veličiny rozdělují do **tříd**.

Třída je přesně definovaný projev znaku. Představuje přesné vymezení (přesné definování) intervalu hodnot náhodné veličiny, přičemž jednotlivé variační třídy v jednom souboru dat mají obvykle stejnou velikost. Každý jedinec tedy „patří" do určitého intervalu – třídy.

Třída je reprezentována nejčastěji jedinou hodnotou – **středem třídy** (nebo intervalem vymezujícím třídu) a počtem hodnot zjištěných pro danou třídu. Výskyt hodnoty náhodné veličiny v dané třídě je označován pojmem **četnost (frekvence) třídy**. Zjišťuje se tak, že se spočítá kolik hodnot se v dané třídě vyskytuje, a tento počet představuje četnost třídy.

Podle vyjádření četnosti rozlišujeme:

a) **absolutní četnost** – hodnota, která vyjadřuje, kolik hodnot se v dané třídě vyskytuje

b) **relativní četnost** – hodnota, která vyjadřuje poměr (%) výskytu hodnot v dané třídě k celkovému počtu hodnot ve všech třídách (v celém výběrovém souboru).

Na rozdíl od náhodných veličin kvalitativních znaků, kdy se třídy vytváří přirozeně (vyplývají z projevu znaku – např. barva srsti králíků má třídy: bílá, šedá, stříbrná, černá apod.), pro náhodnou veličinu kvantitativního znaku se třídy **vytváří uměle** – tj. vytváří je člověk, protože nevyplývají z projevu znaku. Např. pro hmotnost králíků se třídy vytvoří uměle tak, že se přesně vymezí intervaly pro hodnoty hmotnosti např. 1,00-1,50 kg, 1,51-2,00 kg, 2,01-2,50 kg, 2,51-3,00 kg, 3,01-3,50 kg, 3,51-4,00 kg.

Při řazení do tříd je vždy nutno vycházet z přesnosti měření původních hodnot a meze intervalů tříd stanovit tak, aby o každé hodnotě sledovaného znaku bylo jasné, do které třídy patří.

Při stanovení počtu tříd se vždy uplatňuje subjektivní prvek. Počet tříd nemá být příliš velký (pracnost výpočtů) ani příliš malý (ztráta charakteristických vlastností materiálu). Za nejvhodnější můžeme obvykle považovat 10 – 15 tříd. Počet tříd nad 20 je příliš velký, pod 6 příliš malý.

Orientačně lze počet tříd stanovit podle rozsahu výběrového souboru takto:

do 100 jedinců 6 – 9 tříd

do 500 jedinců 10 – 15 tříd

nad 500 jedinců 16 – 20 tříd

Pro přesnější stanovení tříd je vhodné dodržovat některé hlavní zásady, podle nichž se řazení do tříd (třídění, grupování) provádí:

U naměřených dat zjistíme nejmenší a největší číselnou hodnotu a provedeme jejich odečtení. Tím získáme variační rozpětí, které rozdělíme na určitý počet stejně velkých dílů. Ve výše uvedeném příkladu pro hmotností králíků bychom tedy dostali: 4,00-1,00=3,00 kg dělíme 6 (zvolený počet tříd) a dostaneme 0,5 kg jako *velikost třídního intervalu*. Všechny hodnoty, které jsou v jednotlivých dílech (třídách) obsaženy, pak reprezentuje hodnota jediná (střed třídy). Rozdíl mezi dvěma po sobě následujícími středy tříd nazýváme *délkou intervalu* (třídy). V zásadě by měla být u všech skupin stejná. Jestliže je nutno vzhledem k zpracovávanému biologickému materiálu užít nestejné délky intervalů, je vhodné stanovit pravidelně se zvětšující nebo zmenšující intervaly.

Při stanovení výchozího bodu a počtu setříděných hodnot proměnných dbáme na to, aby středy intervalů padly pokud možno na celá čísla, čímž se značně ušetří práce při výpočtech.

Pro zjištění četností vytvořených tříd můžeme v praxi použít například čárkovací metodu rozdělení četností ve třídách, tak jak je uvedeno v Tab. 1.1. V tabulce jsou uvedeny četnosti hmotností desetidenních kuřat, vážených s přesností na celý gram, u výběrového souboru 100 náhodně vybraných kuřat.

Tab.1.1 Čárkovací metoda rozdělení četností ve třídách

Váha v g	Četnost	
76 – 80	/	1
81 – 85	/	1
86 – 90	////	4
91 – 95	~~////~~ ////	9
96 -100	~~////~~ ~~////~~ ////	14
101 – 105	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	20
106 – 110	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ //	17
11 – 115	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	15
116 – 120	~~////~~ ~~////~~	10
121 – 125	~~////~~	5
126 – 130	///	3
131 - 135	/	1
Celkem		100

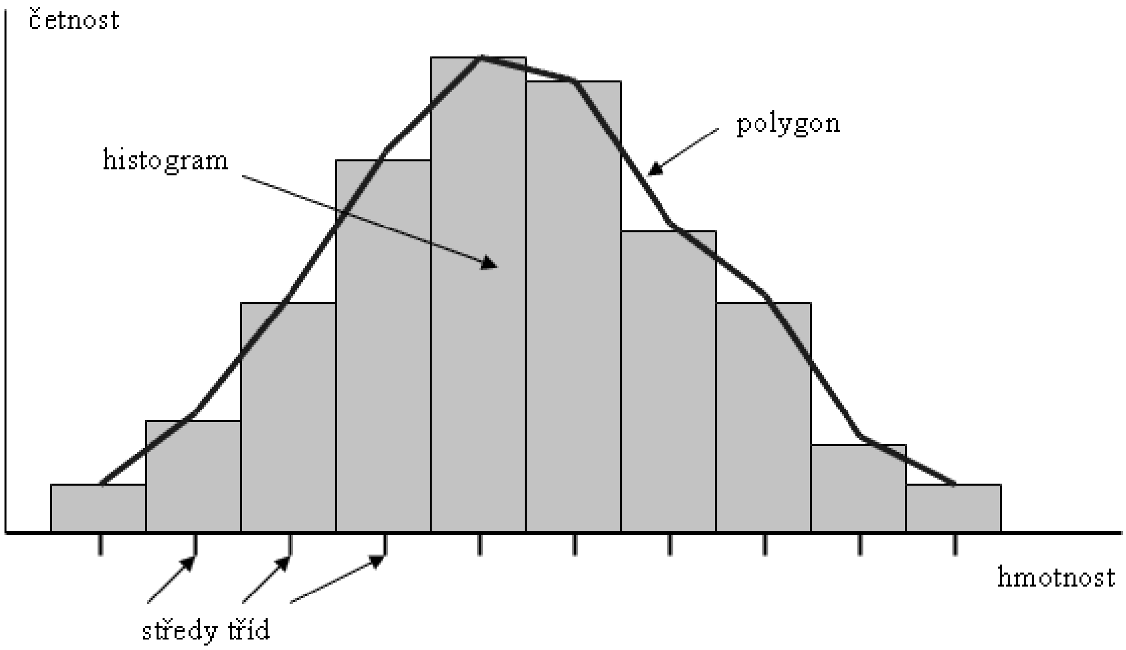
Čárkovací metoda je jednak rychlá, jednak v uvedené formě přímo přehledně naznačuje tvar rozdělení četností. Podle této tabulky můžeme pak rozdělení četností znázornit některým z diagramů pro spojitou náhodnou veličinu (histogram, polygon).

Histogram představuje grafické vyjádření rozdělení spojité náhodné veličiny, ve kterém jsou na ose *x* vyznačeny třídní intervaly a nad každým intervalem je sestrojen obdélník (sloupec), jenž vyjadřuje absolutní nebo relativní četnost pro daný třídní interval.

Polygon představuje grafické vyjádření rozdělení spojité náhodné veličiny, ve kterém jsou na ose *x* vyznačeny středy třídních intervalů a nad každým intervalem je ve středu třídy sestrojen bod, jenž vyjadřuje absolutní nebo relativní četnost pro daný třídní interval. Body jsou spojeny lineárně.

Příklad grafického vyjádření rozdělení četností spojité náhodné veličiny (hmotnost) pomocí histogramu a polygonu je zobrazen na obr. č. 1.2.

Obr. č. 1.2 Rozdělení četností spojité náhodné veličiny

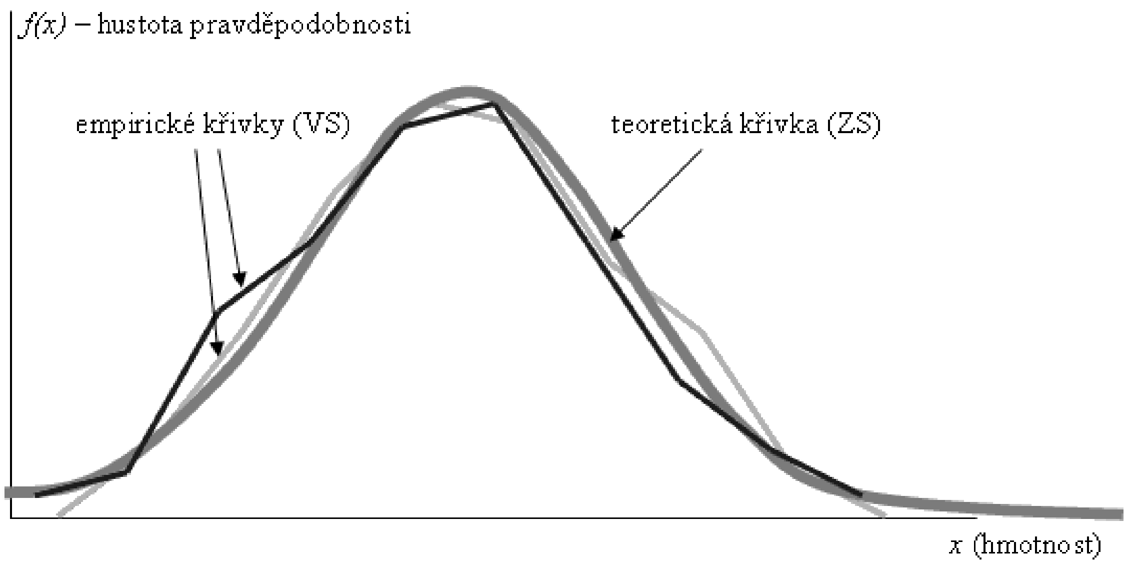


Polygon jako typ grafického vyjádření rozdělení četností je často používán jak pro **spojitou** tak i **diskrétní** veličinu (u této pak lineárně spojujeme vrcholy úseček úsečkového grafu)**.** Polygon tak představuje nejčastější typ grafického vyjádření rozdělení četností náhodných veličin kvantitativních statistických znaků. Tvar polygonu je specifický pro každý konkrétní výběrový soubor, na kterém bylo provedeno sledování dané náhodné veličiny. Pro polygon proto často používáme pojem **empirická křivka** rozdělení náhodné veličiny**.** Při opakovaném měření stejné náhodné veličiny u jedinců z jiného výběrového souboru, který byl vybrán z téže populace dostaneme poněkud jiný tvar empirické křivky (projev geneticky podmíněné variability jedinců výběrového souboru).

Všechny empirické křivky pro možné výběry z téže populace se pohybují přibližně okolo **teoretické křivky**, která je spojitě vyhlazená a popisuje ***pravděpodobnostní rozdělení*** náhodné veličiny u celého základního souboru. Tuto křivku pravděpodobnostního rozdělení sledované háhodné veličiny nelze získat na základě výsledků praktických měření, můžeme ji pouze teoreticky předpokládat a odhadovat její tvar na základě empirických křivek výběrových souborů z dané populace. Křivka pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny by teoreticky vznikla nekonečným zvětšováním výběrového souboru při nekonečném zmenšení tříd. Přitom čím větší bude výběrový soubor, tím přesněji se bude blížit empirická křivka skutečnému tvaru křivky teoretické pro danou náhodnou veličinu. Protože u nekonečně velkého základního souboru nelze použít pojem absolutní četnost (na ose *y*), jako tomu bylo v případě empirických křivek četností pro výběrové soubory, je u teoretické křivky rozdělení používán na ose *y* pojem *hustota pravděpodobnosti – f(x)* pro výskyt jednotlivých hodnot x_i sledované veličiny *X*.. Tato pravděpodobnostní funkce vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná veličina *X* nabude hodnoty *x* (viz dále).

Příklad grafického vyjádření pravděpodobnostního rozdělení spojité náhodné veličiny (hmotnost) pomocí teoretické křivky rozdělení v základním souboru (ZS) ve vztahu k empirickým křivkám rozdělení četností dané náhodné veličiny ve výběrových souborech (VS) je zobrazen na obr. č. 1.3.

Obr. č. 1.3 Rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny

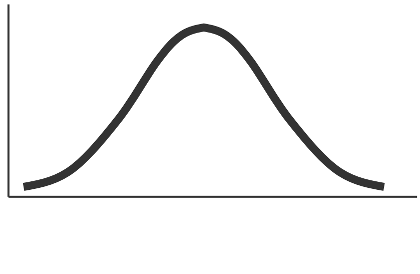


Typy pravděpodobnostních rozdělení

Velká řada biologických znaků odpovídá normálnímu (Gaussovu) rozdělení pravděpodobností, které je symetrické – většina hodnot v populaci je rozmístěna kolem střední hodnoty a naopak extrémně nízké a vysoké hodnoty mají v populaci nejnižší pravděpodobnost výskytu. Některé z biologických znaků (např. v medicíně) však tomuto rozdělení neodpovídají – křivky jejich pravděpodobnostních rozdělení pak mohou nabývat různých tvarů (asymetrické, nepravidelné ap.). Příklady různých typů pravděpodobnostních rozdělení pro spojitou náhodnou veličinu jsou uvedeny na obr. 1.4.

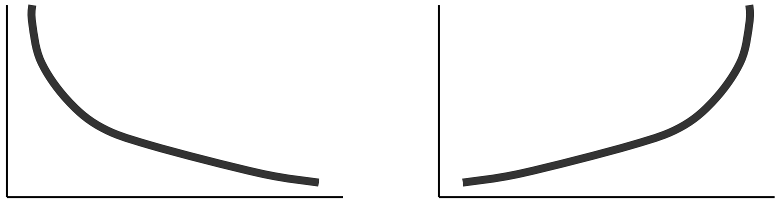
Obr. 1.4 Různé typy pravděpodobnostních rozdělení spojité náhodné veličiny

a) **Normální, symetrické (Gaussovo)**

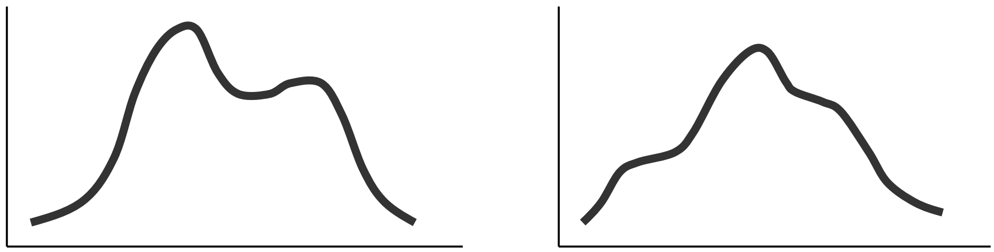


b) Asymetrické (vrchol křivky posunut doleva, doprava)

ad b) Extrémní (pouze klesající, stoupající)



c) Neznámé (nepravidelné, dvou- i vícevrcholové)



1. 5. 2 Distribuční funkce

Rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny vyjadřuje pravděpodobnost výskytu hodnoty náhodné veličiny v závislosti na její hodnotě. Kromě pravděpodobnostní funkce $f\,(x)$ – hustota pravděpodobnosti ji můžeme vyjádřit i distribuční funkcí $F(x)$. Z teoretického hlediska představuje distribuční funkce $F(x)$ nejúplnější popis pravděpodobnostního chování diskrétní nebo spojité náhodné proměnné X.

Distribuční funkce $F(x)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná proměnná (veličina X) nabude hodnoty menší (případně rovné) než určitá hodnota x. Distribuční funkce $F(x_i)$ je tedy vždy přiřazena ke konkrétní hodnotě náhodné veličiny x_i.

V symbolech můžeme distribuční funkci vyjádřit následovně:

$$F(x_i) = P(X < x_i)$$

Distribuční funkce je definována pro všechna reálná čísla x, má tedy smysl pro hodnoty v intervalu: $-\infty < x < +\infty$. Pro tato reálná čísla pak distribuční fınkce $F(x_i)$ může nabývat hodnot v intervalu $\langle 0\ ;\ +1 \rangle$. Tyto hraniční hodnoty intervalu dostaneme při dosazení extrémních hodnot x (tzn. $x = -\infty$ a $x = +\infty$) za x_i . Dostaneme tedy:

$F(-\infty) = 0$, protože pravděpodobnost $P(X < -\infty)$ je nemožná

$F(+\infty) = 1$, protože pravděpodobnost $P(X < +\infty)$ je jistá

Distribuční funkce $F(x)$ je funkce neklesající, tedy když $x_i < x_j$, pak $F(x_i) \leq F(x_j)$. Distribuční funkce $F(x)$ může být nebo nemusí být spojitá. Jestliže je $F(x)$ spojitá funkce, pak příslušná náhodná proměnná je spojitá.

Pro počítání pravděpodobností platí vzorce:

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

Chování *diskrétní* náhodné veličiny lze popsat pravděpodobnostní funkcí $p(x) = P(X = x)$. Známe-li pravděpodobnostní funkci, umíme dopočítat distribuční funkci, a naopak.

Chování *spojité* náhodné veličiny lze popsat podobným ekvivalentem pravděpodobnostní funkce. Má-li $F(x)$ pro všechna x derivaci, nazýváme tuto derivaci hustotou pravděpodobnosti neboli frekvenční funkcí $f(x)$ náhodné proměnné X (viz obr. č.1.3 a obr. č.1.5). Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ vykazuje podobné vlastnosti jako $p(x) = P(X = x)$ u diskrétních náhodných proměnných.

Distribuční funkce spojité náhodné proměnné, pokud existuje její hustota, se spočítá pomocí integrace:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

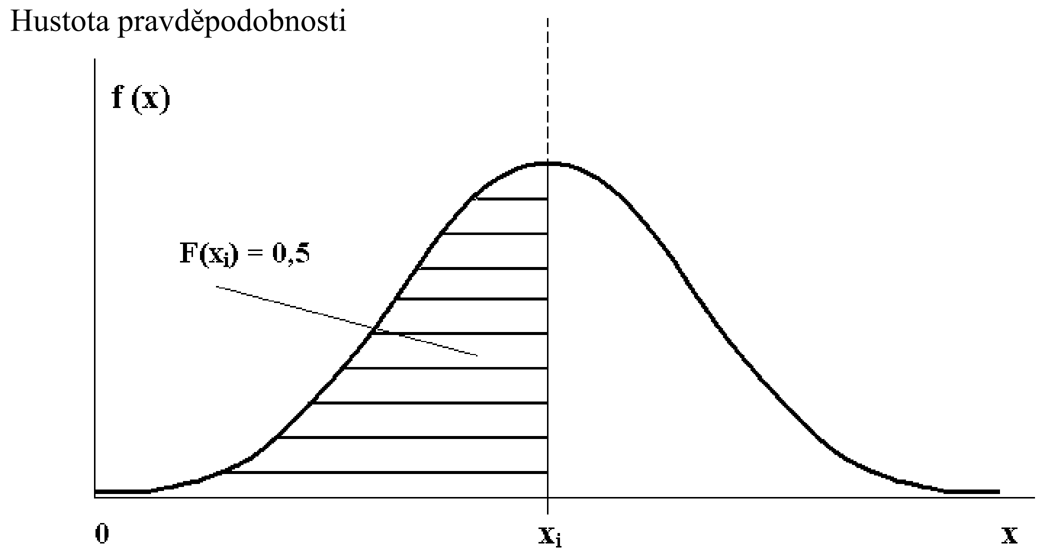
Pro diskrétní náhodnou proměnnou spočítáme její distribuční funkci jednoduše pomocí pravděpodobnostní funkce jako součet hodnot pravděpodobnostní funkce:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

Což znamená, že distribuční funkce má v bodě x hodnotu součtu těch pravděpodobností jednotlivých hodnot x_i, které jsou menší nebo rovné x.

Distribuční funkci $F(x_i)$ lze graficky vyjádřit jako *plochu pod křivkou* pravděpodobnostního rozdělení, ohraničenou v hodnotě x_i. Příklad pro grafické vyjádření distribuční funkce $F(x_i)$ Gausssova normálního rozdělení, definované pro bod x_i je zobrazena na obr. č.1.5 (vyšrafovaná část plochy pod křivkou).

Obr. č. 1.5 Distribuční funkce *F(xi)*



Na výše uvedeném grafu je znázorněn příklad distribuční funkce pro Gaussovo normální rozdělení v bodě x_i, který je roven střední hodnotě populace (mediánu). Celková plocha pod křivkou zde symbolicky vyjadřuje celou populaci (100% jedinců), zatímco vyšrafovaná část plochy pod křivkou zobrazuje distribuční funkci v bodě x_i. Distribuční funkce zde tedy symbolicky popisuje podíl jedinců, kteří mají svoje hodnoty menší (případně rovné) než je hodnota x_i. V tomto případě je to 50% populace (distribuční funkce $F(x_i) = 0{,}5$).

Hodnoty distribučních funkcí odpovídající různým hodnotám x jsou pro nejdůležitější a nejběžnější typy rozdělení spojitých i nespojitých veličin již spočítány, zaneseny ve statistických tabulkách a lze je využívat pro statistické výpočty (viz Příloha Tab. č. 2 Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení).

S pojmem distribuční funkce úzce souvisí pojem **kvantil.** Kvantil je libovolná hodnota náhodné proměnné (sledovaného znaku) x, která rozděluje soubor dat na dvě části :

- podíl hodnot nižších (případně rovných) než je kvantil
- podíl hodnot vyšších než je kvantil.

Kvantil x_p s hladinou p spojité náhodné proměnné X s distribuční funkcí F je definován rovnicí:

$F(x_p) = p$

Což znamená, že každému kvantilu (libovolné hodnotě náhodné proměnné) x_p, je definována jeho odpovídající distribuční funkce $F(x_p)$, kterou vyjadřujeme v podobě pravděpodobnosti p (v grafickém vyjádření je to část plochy pod křivkou pravděpodobnostního rozdělení, ohraničená kvantilem x_p).

Např. 20% kvantil ($x_{0,2}$) je hodnota, která rozdělí plochu pod křivkou pravděpodobnostního rozdělení tak, že 20% souboru má hodnoty sledované proměnné menší (případně rovné) než kvantil $x_{0,2}$ a 80% souboru má hodnoty větší než kvantil $x_{0,2}$.

Mezi kvantily zaujímá významné místo 50% kvantil, tzv. **medián** ($x_{0,5}$), který člení statistický soubor na dvě stejně četné poloviny. Odděluje 50% nízkých hodnot sledovaného statistického znaku (náhodné proměnné) od 50% vysokých hodnot znaku v souboru. Jinými důležitými kvantily používanými ve statistice jsou **kvartily** ($x_{0,25}$, $x_{0,5}$, $x_{0,75}$), které rozdělují soubor hodnot náhodné proměnné na čtvrtiny, dále decily, percentily ad.

Kapitola 2

Typy rozdělení náhodné veličiny

(spojitá veličina)

V kapitole 1 jsme poznali, jakým způsobem získáme empirickou křivku rozdělení četností hodnot sledované náhodné veličiny u výběrového souboru a víme, že empirické křivky rozdělení dané veličiny u různých výběrových souborů vybraných z téže populace, lze použít pro odhadování tvaru teoretické křivky pravděpodobnostního rozdělení sledované veličiny v celém základním souboru. Pravděpodobnostní rozdělení pro různé náhodné veličiny může teoreticky nabývat nekonečně mnoho různých tvarů křivek (např. normální, asymetrické, extrémní, nepravidelné aj. rozdělení). V následující kapitole bude uveden výběr některých nejčastěji používaných typů pravděpodobnostních rozdělení, důležitých při statistické analýze biologických a medicínských dat. Z praktického hlediska můžeme rozlišit dvě skupiny pravděpodobnostních rozdělení – rozdělení používaná ve statistice pro popis rozdělení náhodných veličin u základních souborů a rozdělení používaná pro popis rozdělení náhodných veličin u výběrových souborů.

2. 1 Pravděpodobnostní rozdělení pro základní soubory

Pro popis náhodných veličin, s kterými pracujeme ve statistice u základních souborů, používáme nejčastěji následující pravděpodobnostní rozdělení: Gaussovo normální rozdělení, normované normální rozdělení, neznámé rozdělení.

2.1.1 Gaussovo normální rozdělení

Při statistické analýze biologických a medicínských dat zaujímá Gaussovo normální rozdělení zcela výsadní postavení. Normálním rozdělením se řídí velké množství náhodných veličin v biologii (nebo je zde alespoň předpokládáno), např. tělesné rozměry náhodně vybrané osoby, váha náhodně vybrané myši, délka zadní končetiny u náhodně vybraného laboratorního králíka, kapacita plic u náhodně vybraného pacienta, hmotnost vejce u náhodně vybrané nosnice apod. Při statistické analýze bývá normalita rozdělení podmínkou použití těch nejúčinnějších statistických metod, takže někdy je nutno provádět transformaci náhodných veličin tak, aby získaly normální rozdělení. Mnoho sledovaných biologických proměnných, které se tímto rozdělením vůbec neřídí, můžeme také aproximativně (tzn. s uspokojivým přiblížením) modelovat pomocí tohoto rozdělení, především u statistických souborů s velkým počtem jedinců.

Vznik normálního rozdělení si můžeme představit takto: kdyby nebylo náhodných vlivů, nabyla by nějaká sledovaná veličina (např. tělesná výška v kolektivu dospělých osob) konstantní hodnotu μ. Představme si nyní, že do hry vstupuje velké množství drobných a nezávislých náhodných vlivů v_1, v_2, v_3,…., jejichž hodnoty mírně kolísají kolem nuly (na tělesnou výšku každé z osob působila během růstu řada impulsů, z nichž každý sám o sobě přispěl k celkové výšce nepatrnou hodnotou v_i). Předpokládejme, že tyto náhodné vlivy se ke konstantě přičítají, přičemž se tedy i sledovaná veličina stane náhodnou.

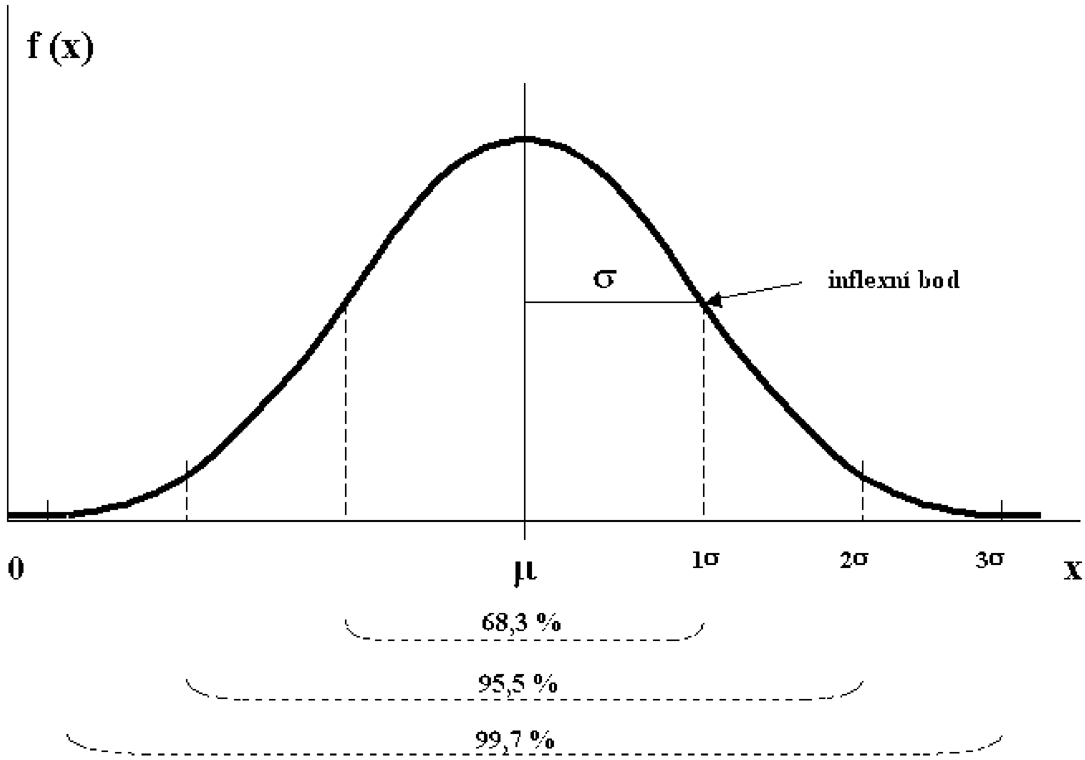
$X = \mu + v_1 + v_2 + v_3 \ldots\ldots$

Tato náhodná veličina X má v celém základním souboru normální rozdělení závislé na střední hodnotě μ a směrodatné odchylce $\sigma > 0$, která charakterizuje variabilitu náhodné veličiny X (blíže viz kap. 3: Popisné charakteristiky statistických souborů).

Grafickým vyjádřením Gaussova normálního rozdělení je zvonovitá křivka, symetrická kolem střední hodnoty μ („parametr polohy“ – udává polohu křivky na ose x). Šířku křivky v tzv. inflexním bodě (bod obratu křivky) udává směrodatná odchylka σ („parametr rozptýlení“).

Příklad grafického vyjádření Gaussova normálního rozdělení pro náhodnou veličinu (např. tělená výška) je uveden na obr. č. 2.1.

Obr. 2.1 Gaussovo normální rozdělení pravděpodobností



X = spojitá náhodná veličina (tělesná výška)

$f(x)$= hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X

μ = střední hodnota náhodné veličiny X

σ = směrodatná odchylka náhodné veličiny X

Jak je vidět z grafu, tvar křivky Gaussova normálního rozdělení je ovlivněn a plně charakterizován parametry μ a σ. Zkráceně můžeme označit Gaussovo normální rozdělení se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ symbolem GNR (μ; σ).

Přesnější interpretaci parametru rozptýlení σ přibližují vztahy, které uvádějí pravděpodobnosti různých intervalů kolem středu rozdělení. Pro každé Gaussovo normální rozdělení GNR (μ; σ) platí:

V rozmezí hodnot $\mu \pm 1\sigma$ se vyskytuje 68,3 % všech jedinců populace.

V rozmezí hodnot $\mu \pm 2\sigma$ se vyskytuje 95,5 % všech jedinců populace.

V rozmezí hodnot $\mu \pm 3\sigma$ se vyskytuje 99,7 % všech jedinců populace.

Výskyt zbývajících 0,3 % hodnot souboru (oba extrémní konce osy *x*) je tak málo pravděpodobný, že z hlediska statistiky jsou takové hodnoty považovány za chybu měření („extrémní hodnoty“) a vylučují se z dalšího hodnocení (blíže viz Grubbsův test v kap. 5 Vylučování extrémních hodnot souboru).

2.1.2 Normované normální rozdělení

Zvláštní místo ve třídě normálních rozdělení zaujímá normované (neboli standardizované) normální rozdělení. Zkráceně ho lze označit symbolem NNR (0; 1). Je to tedy normální rozdělení se střední hodnotou, která je rovna 0 a směrodatnou odchylkou, která je rovna vždy 1. Někdy se toto rozdělení nazývá *U*-rozdělení (případně *Z*-rozdělení), protože je definováno pro teoreticky odvozenou veličinu *U*, kterou dostaneme transformací původní náhodné veličiny *X* tak, že od ní odečteme střední hodnotu celé populace a rozdíl vydělíme směrodatnou odchylkou:

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

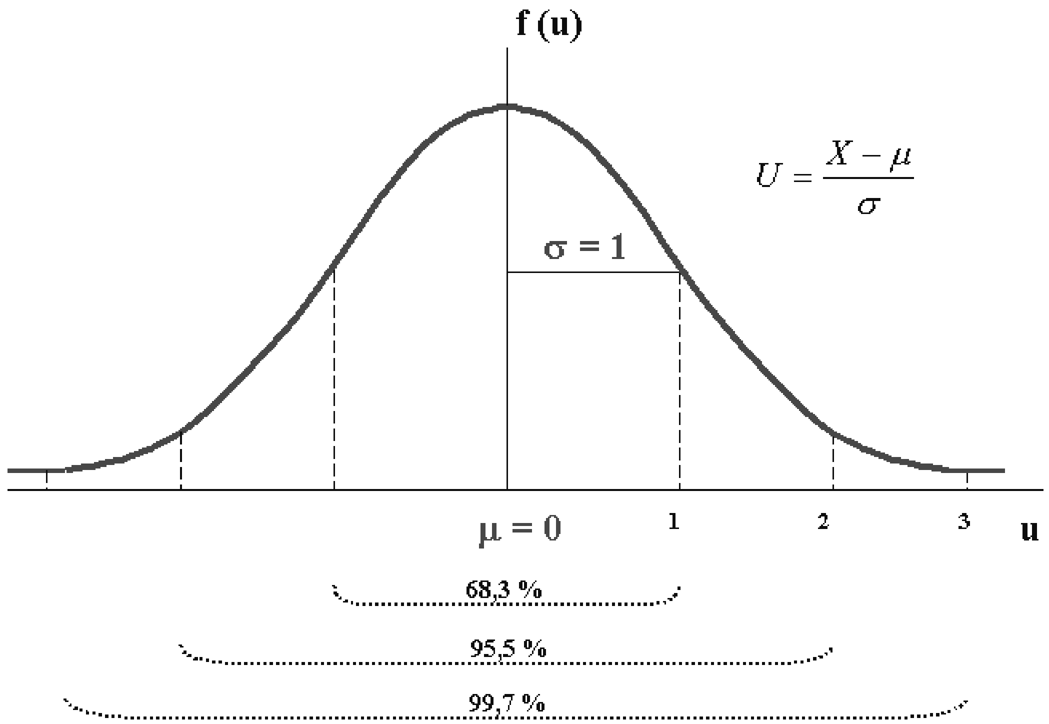
X – měřená náhodná veličina (absolutní hodnoty znaku x_i) s GNR o parametrech μ a σ

U – normovaná veličina (relativní hodnoty u_i) s NNR o parametrech $\mu_{(N)} = 0$ a $\sigma_{(N)} = 1$

Transformací získané hodnoty normované veličiny *U* jsou relativní (bezrozměrné), přičemž každá hodnota u_i udává počet směrodatných odchylek od střední hodnoty 0. Například pro hodnotu x = 115 z původní veličiny s Gaussovým normálním rozdělením se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 15 je pomocí výše uvedené transformace vypočítána hodnota u = +1, která také znamená, že hodnota 115 leží *jednu* směrodatnou odchylku *nad průměrem*. Pro hodnotu x = 85, z původní veličiny s Gaussovým normálním rozdělením se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 15 by byla vypočtená hodnota u = -1, která bude znamenat, že hodnota 85 leží jednu směrodatnou odchylku *pod průměrem*.

Příklad grafického vyjádření normovaného normálního rozdělení pro náhodnou veličinu *U* je uveden na obr. č. 2.2.

Obr. 2.2 Normované normální rozdělení pravděpodobností



U = normovaná náhodná veličina získaná transformací

f(u)= hustota pravděpodobnosti normované náhodné veličiny *U*

μ = střední hodnota normované náhodné veličiny *U*

σ = směrodatná odchylka normované náhodné veličiny *U*

Tvar křivky normovaného rozdělení je prakticky shodný tvarem křivky Gaussova normálního rozdělení – křivka je zvonovitá, symetrická kolem střední hodnoty μ. Liší se pouze posunem na ose *x* (střed souměrnosti křivky NNR, tzn střední hodnota μ je posunuta do hodnoty 0) a jednotkovou šířkou (směrodatná odchylka $\sigma = 1$). Podobně platí i shoda v procentuelním zastoupení výskytu hodnot v intervalech daných směrodatnými odchylkami symetricky kolem střední hodnoty μ.

Normované hodnoty veličiny *U* spolu s jejich distribučními funkcemi *F(u)* jsou tabelovány ve statistických tabulkách (viz Příloha Tab. č. 2 Distribuční funkce *F(u)* normovaného normálního rozdělení). Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení je možno využívat při zjišťování pravděpodobnosti, že daná hodnota padne do určitého intervalu (viz příklad 2.1).

Příklad 2.1:

Předpokládejme, že váha laboratorních myší v chovu má přibližně GNR okolo $\mu = 95$ g se směrodatnou odchylkou $\sigma = 14$ g.

Jaký *podíl* myší v tomto chovu přesáhne váhu 120 g ?

Postup řešení:

1. Transformace sledované veličiny (hodnota 120 g) na normovanou hodnotu *u*:

$$u_i = \frac{120 - 95}{14} = 1{,}79$$

2. Ve statistických tabulkách (Příloha Tab. č. 2 Distribuční funkce *F(u)* normovaného normálního rozdělení) najdeme pro u_i = 1,79 distribuční funkci $F(u_i)$ = 0,963 (tato vyjadřuje **pravděpodobnost**, že normovaná náhodná veličina *U* bude **menší** než je hodnota 1,79).

3. Dopočtem do 1 získáme pravděpodobnost, že normovaná náhodná veličina *U* bude **větší** než 1,79:

1 - 0,963 = 0,037 = 3,7 %

Závěr: Ve sledovaném chovu přesáhne 3,7 % myší váhu 120 g.

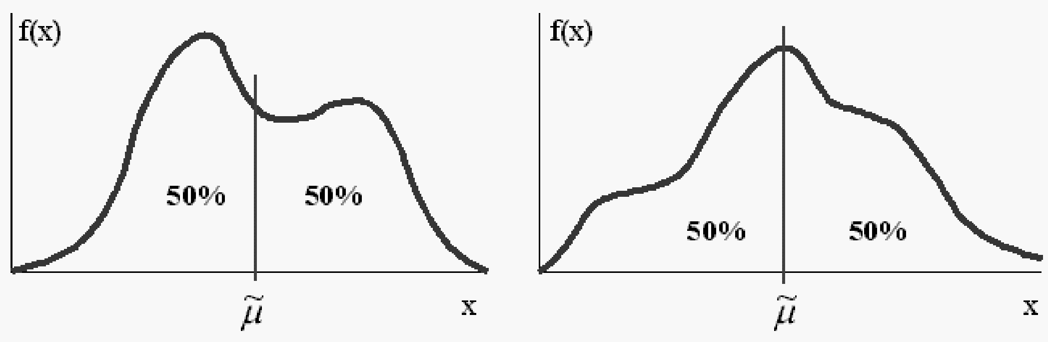
2.1.3 Neznámé rozdělení

Některé statistické znaky (spojité náhodné veličiny) sledované v biologických a lékařských vědách neodpovídají Gaussovu normálnímu rozdělení pravděpodobností – mají pak obvykle různě nepravidelnou křivku rozdělení, často vícevrcholovou a asymetrickou. Hovoříme o tzv. neznámém rozdělení pravděpodobností, které pro nepravidelnost křivky nelze popsat přesnými parametry, určujícími střed symetrie ani šířku křivky, jako tomu bylo u Gausova normálního rozdělení.

Pro popis neznámého rozdělení je používána jediná charakteristika – medián $\tilde{\mu}$. Medián je považován za střed neznámého rozdělení, šířku křivky neznámého rozdělení nelze pro její nepravidelnost určovat. Protože je medián definován jako 50 % kvantil, dělí plochu pod křivkou rozdělení na 2 poloviny, symbolicky znázorňující podíl jedinců (50 %) v populaci, kteří mají hodnoty sledovaného znaku nižší než medián a podíl jedinců (50 %) v populaci, kteří mají hodnoty sledovaného znaku vyšší než medián.

Příklady grafického vyjádření neznámého rozdělení pro spojitou náhodnou veličinu jsou uvedeny na obr. č. 2.3.

Obr. 2.3 Neznámé rozdělení pravděpodobností



2. 2 Pravděpodobnostní rozdělení pro výběrové soubory

V rámci statistické analýzy počítáme z dat sledovaných náhodných veličin různé *statistiky* (určité funkce normálně rozdělených náhodných veličin) a provádíme jejich interpretaci pomocí metod statistického usuzování (statistické indukce). Cílem statistického usuzování je získat představu o vlastnostech zkoumaných jevů na úrovni celé populace a to na *základě dat* získaných z jednoho nebo několika *výběrových souborů*. O statistické indukci budou pojednávat následující kapitoly (viz kap. Odhady parametrů statistických souborů, Testování statistických hypotéz ad.). V této kapitole popíšeme náhodné chování některých důležitých statistik, které používáme v oblasti statistického usuzování při práci s výběrovými soubory. Jinými slovy, budeme se zabývat pravděpodobnostním rozdělením těchto statistik. Tyto poznatky nám pomohou při výkladu postupů a metod statistického usuzování.

Výběrové rozdělení statistiky je pravděpodobnostní rozdělení hodnot, které statistika nabývá ve všech možných výběrech o daném rozsahu ze specifikované populace. Kdybychom provedli kompletní výběr všech jedinců z populace a spočítali pro sledovanou proměnnou popisné statistiky (např. průměr nebo směrodatnou odchylku), zjistili bychom parametry jejího statistického chování zcela přesně. V případě, že máme k dispozici pouze výběr z populace o rozsahu n jedinců, vypočítáme pomocí něho jenom odhady parametrů rozdělení. Tyto odhady jsou statistikami a budou se pravděpodobně lišit od skutečných hodnot parametrů. Jestliže provedeme další výběr z téže populace, nové statistiky se budou lišit také od těch, jež jsme spočítali z prvního výběru. Tyto diference jsou známé pod názvem *výběrová variabilita*. Takto pojatou statistiku lze jistě považovat za náhodnou proměnnou. Její rozdělení nazýváme výběrové rozdělení.

Pro popis náhodných veličin (statistik), s kterými pracujeme v matematicko-statistických úlohách na základě výběrových souborů, používáme nejčastěji následující pravděpodobnostní rozdělení: Studentovo t-rozdělení, χ^2 (čti chí-kvadrát) rozdělení (Pearsonovo) a F-rozdělení (Fisher-Snedecorovo).

2.2.1 Studentovo *t*-rozdělení

Studentovo rozdělení platí pro teoreticky odvozenou veličinu $\boldsymbol{t}$, která vznikne transformací normálního rozdělení (náhodné veličiny X), podobně jako tomu bylo u normovaného normálního rozdělení, kde jsme však znali směrodatnou odchylku σ celé populace. V případě, kdy pracujeme s výběrovými soubory z populace, u které neznáme skutečnou směrodatnou odchylku σ a pouze ji odhadujeme pomocí výběrové směrodatné odchylky s, používáme následující transformaci:

$$t = \frac{X - \mu}{s}$$

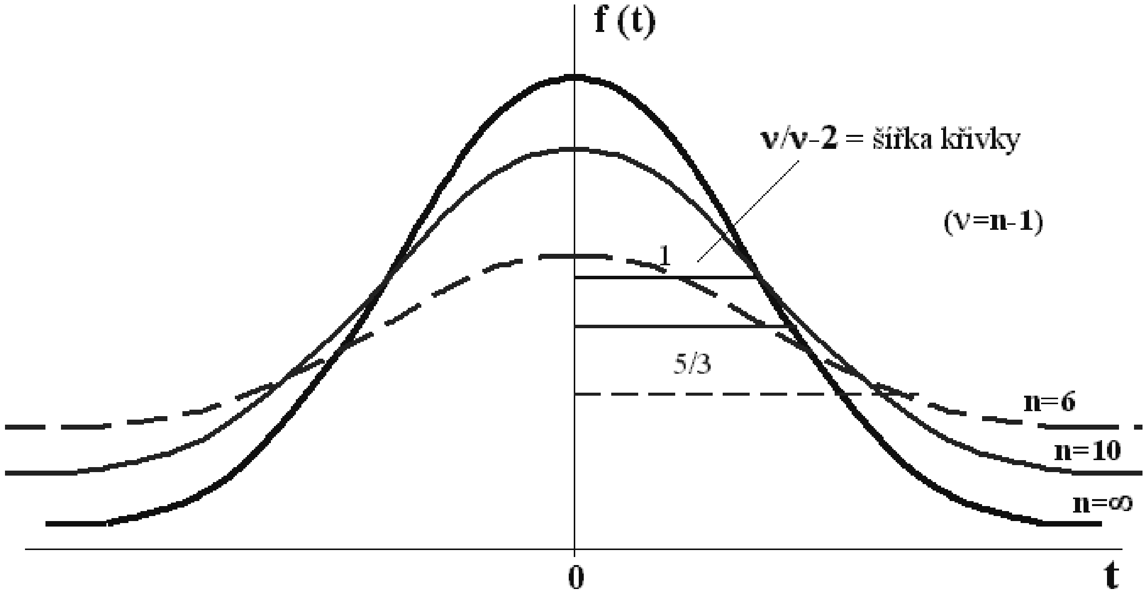
Transformací vytvořená veličina t se řídí Studentovým t-rozdělením a používáme ji ve statistice např. při výpočtech spojených s testováním rozdílu 2 průměrů (středních hodnot).

(t-rozdělení bylo publikováno v r. 1908 angl. chemikem W.S.Gossetem pod pseudonymem „Student“)

Studentovo t-rozdělení zohledňuje ve svém grafickém vyjádření a při statistických výpočtech chybu výběrových souborů, která je způsobena omezeným počtem jedinců výběrového souboru vzhledem k celé populaci.

Příklady grafického vyjádření Studentova *t*-rozdělení pro různě velké výběrové soubory jsou uvedeny na obr. č. 2.4.

Obr. 2.4 Studentovo *t*-rozdělení



t = *t*-statistika (náhodná veličina získaná transformací)

f(t) = hustota pravděpodobnosti *t*-statistiky

n = rozsah výběrového souboru

ν = počet stupňů volnosti výběrového souboru (viz níže)

Studentovo *t*-rozdělení je podobné normovanému normálnímu rozdělení v tom, že je symetrické kolem nuly a má zvonovitý tvar. Na rozdíl od něho je však Studentovo *t*-rozdělení tvořeno celou třídou rozdělení (skupinou křivek), používaných pro různé výběrové soubory. **Šířka křivky** *t*-rozdělení je specifická pro jednotlivé výběry podle velikosti výběrového souboru (přesněji podle **stupňů volnosti výběrového souboru: ν = n-1**). U malých výběrů je křivka nižší a širší, naopak při zvětšování *n* ve výběru se křivka zvyšuje a zužuje (přesná šířka je dána vztahem: **ν/ν-2**).

V případě nekonečného zvětšení výběrového souboru ($n = \infty$), splyne křivka Studentova *t*-rozdělení s normovaným normálním rozdělením pro základní soubor, kde $\mu = 0$ a $\sigma = 1$. Jinými slovy, s rostoucím *n* se tvar *t*-rozdělení aproximativně blíží k normálnímu rozdělení. Naopak, čím menší bude výběrový soubor, tím rozdílnější bude tvar křivky (plošší a širší) oproti normálnímu rozdělení.

Hodnoty *t*-rozdělení jsou tabelovány ve statistických tabulkách v podobě nejčastěji používaných kvantilů, které odpovídají určitým distribučním funkcím, zohledňujícím pravděpodobnost chyby při statistických výpočtech (viz Příloha Tab. č. 3: Kvantily $t_{1-\alpha/2}$ $_{(\nu)}$ Studentova *t*-rozdělení). Tyto specifické kvantily *t*-rozdělení jsou pak využívány např. jako:

- kritické hodnoty při statistickém testování rozdílu 2 průměrů (viz kap. 7 Parametrické testy: Studentův *t*-test)
- koeficienty při výpočtu intervalů spolehlivosti průměru (viz kap. 4 Odhady parametrů základního souboru).

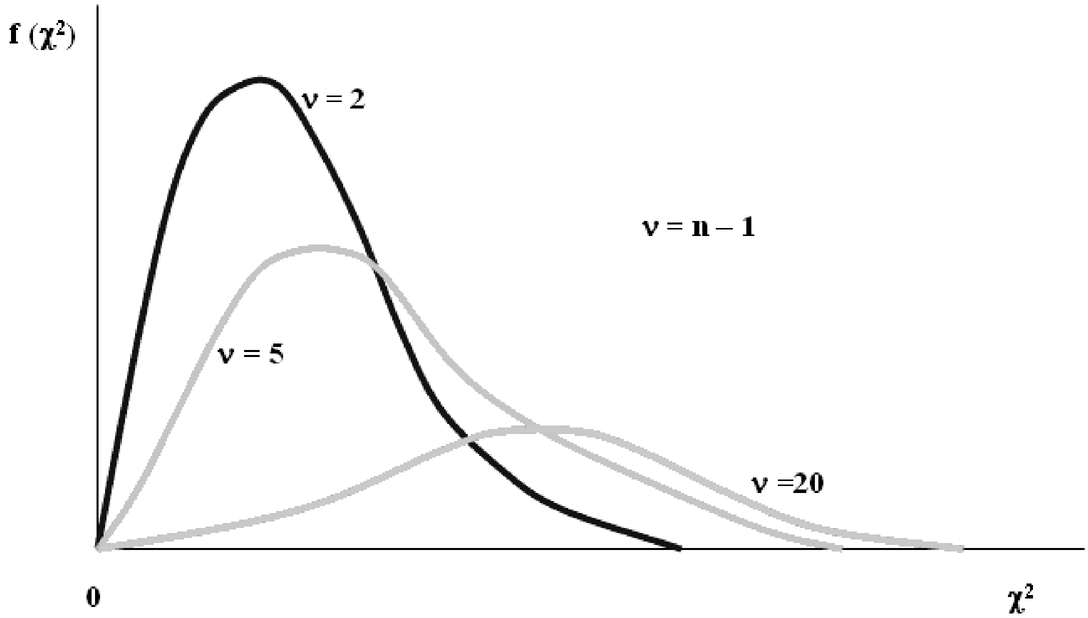
2.2.2 Pearsonovo χ^2–rozdělení (Chí-kvadrát rozdělení)

Pearsonovo rozdělení je definováno pro teoreticky odvozenou veličinu χ^2 , kterou používáme ve statistice při výpočtech spojených např. s testováním rozdílů četností souborů v oblasti nominálních (kategoriálních) statistických znaků nebo při zkoumání variability rozptylu a v mnoha dalších situacích.

Rozdělení χ^2 poprvé odvodil K. Pearson kolem roku 1900, kdy navrhl χ^2-test dobré shody pro kategoriální data. Toto rozdělení má pouze jeden parametr, který nazýváme stupně volnosti (ν). Počet stupňů volnosti má úzký vztah k velikosti sledovaného výběrového souboru, případně k počtu tříd v tomto souboru.

Příklady grafického vyjádření Pearsonova χ^2-rozdělení pro různé výběrové soubory jsou uvedeny na obr. č. 2.5.

Obr. 2.5 Pearsonovo χ^2–rozdělení (chí-kvadrát rozdělení)



χ^2 = chí-kvadrát statistika

$f(\chi^2)$= hustota pravděpodobnosti χ^2-statistiky

ν = počet stupňů volnosti výběrového souboru

Křivka je asymetrická, začínající v nule, rychle stoupající podél osy *y* a poté pozvolna klesající směrem doprava v kladné části osy *x*. U malých výběrů je asymetrie a výška křivky značná a naopak u velkých souborů se křivka stává symetričtější a plošší - podobná normálnímu rozdělení („normalizace“ rozdělení: při vysokých počtech *n* je možno χ^2-rozdělení aproximovat normálním rozdělením).

Hodnoty χ^2 statistiky jsou tabelovány ve statistických tabulkách v podobě nejčastěji používaných kvantilů (viz Příloha Tab. č. 4a, b Kritické hodnoty rozdělení χ^2) a používají se ve statistických výpočtech např. jako:

– kritické hodnoty při statistickém testování rozdílu četností (viz kap. 6 Testování hypotéz: χ^2-test)

– koeficienty při výpočtu intervalů spolehlivosti pro rozptyl, příp. směrodatnou odchylku (viz kap. 4 Odhady parametrů základního souboru).

2.2.3 Fisher-Snedecorovo F-rozdělení

Také *F*-rozdělení, pojmenované po R.A.Fisherovi a G.W.Snedecorovi, našlo uplatnění při popisu náhodného chování testovacích statistik. *F*-rozdělení je definováno pro teoreticky odvozenou veličinu *F*, kterou používáme ve statistice při výpočtech spojených s testováním rozdílu 2 rozptylů.

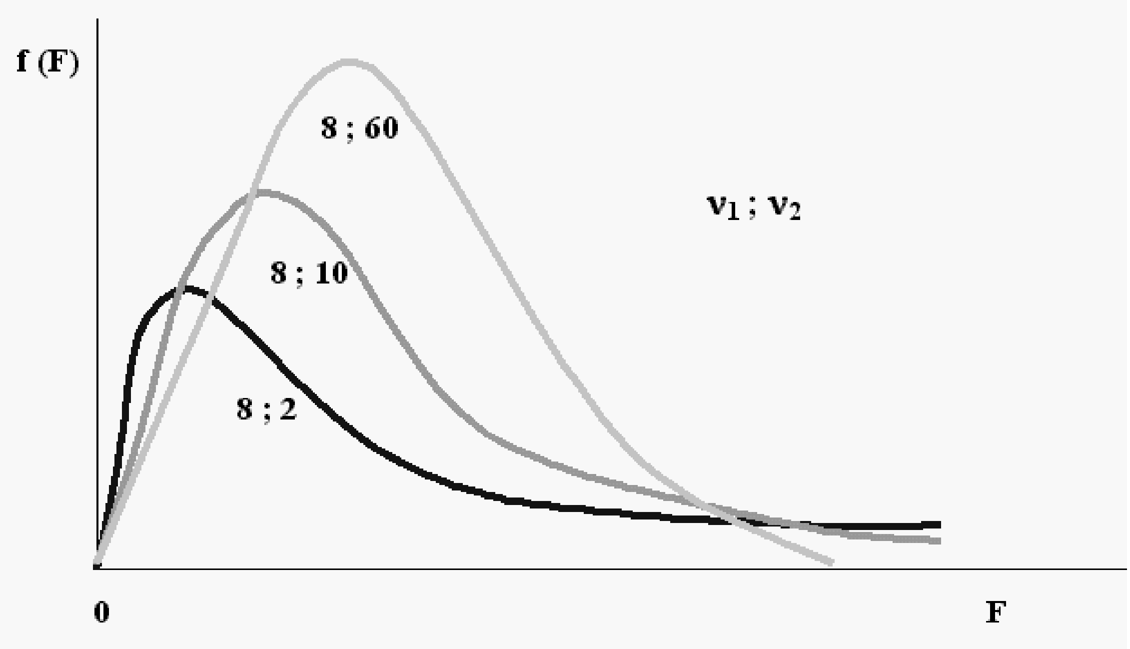
Základem je snaha popsat variabilitu poměru výběrových rozptylů (s_1^2 a s_2^2), jež se vypočítaly z dat dvou nezávislých náhodných výběrů. Podobně jako u rozdělení χ^2, musí být data normálně rozdělená. Navíc se předpokládá, že data pocházejí z populací, které mají stejný teoretický rozptyl. Pak platí, že hodnoty s_1^2/ s_2^2 mají rozdělení *F* se stupni volnosti $\nu_1 = n_1$-1 a $\nu_2 = n_2$ -1, kde n_1 a n_2 jsou rozsahy výběrových souborů. Tvar křivky *F*-rozdělení tedy závisí na dvou parametrech ν_1 a ν_2. Teoreticky je *F*-rozdělení s ν_1 a ν_2 stupni volnosti odvozeno jako podíl dvou nezávislých χ^2-rozdělení s ν_1 a ν_2 stupni volnosti.

Příklady grafického vyjádření *F*-rozdělení pro různé výběrové soubory v závislosti na stupních volnosti jsou uvedeny na obr. č. 2.6.

Jak je možno vidět z obrázku, křivka *F*-rozdělení je asymetrická, začínající v nule, v krátkém úseku stoupající podél osy *y* a po obratu pozvolna klesající směrem doprava v kladné části osy *x*. U malých výběrů je asymetrie velká a křivka nízká a naopak u velkých souborů se křivka stává symetričtější a vyšší (podobná normálnímu rozdělení – „normalizace“ rozdělení při vysokých počtech *n*). Platí tedy stejné pravidlo, jako u rozdělení χ^2, že při velkém rozsahu výběrových souborů lze *F*-rozdělení aproximovat normálním rozdělením).

Hodnoty *F* veličiny jsou tabelovány ve statistických tabulkách v podobě nejčastěji používaných kvantilů (Příloha Tab. č. 8 Kvantily Fisher-Snedecorova rozdělení) a používají se např. jako kritické hodnoty při statistickém testování rozdílu 2 rozptylů (viz kap. 7 Parametrické testy: *F*-test).

Obr. 2.6 Fisher-Snedecorovo *F*–rozdělení



F = *F*-statistika získaná podílem výběrových rozptylů

f(F) = hustota pravděpodobnosti *F*-statistiky

ν_1, ν_2 = počet stupňů volnosti výběrových souborů

Kapitola 3

Popisné charakteristiky statistických souborů

Cílem statistického zpracování údajů je: na základě získaných dat výběrového souboru (výběrových souborů) získat představu o **vlastnostech zkoumaných jevů na úrovni základního souboru** (celé populace). Prvním krokem je obvykle roztřídění naměřených dat výběrového souboru podle hodnot analyzovaného znaku a sestavení tabulek a grafů četností, které poskytnou základní informace o souboru a výchozí materiál pro další statistické metody hodnocení sledovaného znaku.

Následuje hlubší analýza, kdy se snažíme pomocí určitých jednoznačně definovaných ***parametrů (statistických charakteristik)*** shrnout informace o vlastnostech základního souboru do jednoho nebo několika čísel.

Pro charakteristiku vlastností základního souboru je možno použít několik popisných statistických charakteristik (parametrů). Např. jednou z typických vlastností velkého počtu základních souborů (populací) je vlastnost, že převážná většina hodnot sledovaných statistických znaků v těchto populacích se vyskytuje přibližně uprostřed rozmezí měřitelných pozorování celé populace. Proto by bylo vhodné pro každou populaci vyjádřit nějaký indikátor „průměru“ hodnot sledované veličiny jako jednu ze základních popisných charakteristik základního souboru. Tyto indikátory, udávající informaci o tom, kde se nachází střed souboru, se obecně nazývají střední hodnoty (patří k nim např. aritmetický průměr, medián a další parametry uvedené níže). Další důležitou vlastností statistických souborů je rozptýlení hodnot sledované veličiny kolem středu souboru. Některé statistické znaky mohou být velmi proměnlivé (variabilní) ve svých hodnotách v populaci, jiné naopak vykazují velmi úzkou koncentraci pozorovaných hodnot kolem středu celé populace. Statistické charakteristiky popisující vlastnosti, které se týkají se rozptýlení hodnot v souboru se obecně nazývají míry variability (proměnlivosti). Patří k nim např. variační rozpětí, rozptyl, směrodatná odchylka ad.

Pro popisné charakteristiky statistických souborů jako jsou střední hodnoty nebo míry variability je používán pojem ***parametr***, pokud se jedná o popis či charakteristiku základního souboru (populace) a jejich přesné stanovení pro sledované biologické znaky a vlastnosti populací je cílem popisné statistiky. Jak již bylo zmíněno dříve, nejsme bohužel obvykle v praxi schopni obsáhnou do statistického šetření celou populaci, tak aby bylo možno přesně stanovit skutečné hodnoty těchto popisných parametrů. Proto postupujeme tak, že ze základního souboru vybereme jeden nebo několik výběrových souborů a z těchto výběrových dat vypočteme tzv. ***výběrové charakteristiky***, které se pak používají při odhadování skutečných parametrů základního souboru. Výpočtem odhadů přesných hodnot parametrů základního souboru se zabývají speciální statistické metody odhadování parametrů (viz kap. 4 Odhady parametrů základního souboru)

Podle zavedené statistické konvence se používají pro označování skutečných (přesných) parametrů populace řecká písmena a pro označování výběrových charakteristik (odhadů skutečných parametrů) písmena latinské abecedy.

Mezi nejčastěji používané charakteristiky středu statistického souboru patří: střední hodnota (aritmetický průměr), medián, modus, geometrický průměr. Mezi nejčastěji používané charakteristiky variability souboru patří: variační rozpětí, rozptyl, směrodatná odchylka, variační koeficient, střední chyba průměru (směrodatná chyba průměru).

3. 1 Střední hodnoty

V základních i výběrových souborech je možno obvykle nalézt převážnou většinu hodnot sledovaného statistického znaku (především biologických vlastností) přibližně v místě, kde se nachází střed celého rozmezí pozorovaných hodnot. Pro vyjádření této koncentrace hodnot blízko středu souboru se používají střední hodnoty, které slouží zároveň i jako charakteristiky (ukazetele) polohy sledované náhodné veličiny na vodorovné ose v pravoúhlé soustavě souřadnic. **Ukazatel polohy** vyjadřuje vzdálenost střední hodnoty od bodu 0 (počátku souřadnicových os). To je důležité pro představu, kde se náhodná veličina a její rozdělení četností (pravděpodobností) vyskytuje na ose x.

Např. ukazatel polohy pro hmotnost laboratorních králíků např. 2,6 kg při krmné dietě bez podání stimulujících přípravků říká, že ve srovnání s ukazatelem polohy 3,2 kg pro králíky s podáním stimulujících přípravků, je hmotnost králíků po podání stimulujících přípravků více vpravo, tzn. hmotnost těchto králíků je vyšší.

3.1.1 Střední hodnota (aritmetický průměr, The Arithmetic Mean, AVG - average)

Označení: μ (základní soubor), $\bar{x}$ (výběrový soubor)

Pojem střední hodnota je obvykle používán, máme-li na mysli přesný parametr μ popisující skutečný střed (průměr) základního souboru, kdežto pojem aritmetický průměr je vymezen v obvyklé terminologii pro průměr výběrového souboru.

Střední hodnota (aritmetický průměr) je definován jako funkce všech hodnot dané proměnné, kdy součet všech hodnot náhodné proměnné x_i dělíme jejich počtem. Vypočtený průměr pak udává, jaká stejná část z úhrnu hodnot sledované číselné proměnné připadá na jednu jednotku souboru (jednoho jedince). Má smysl všude, kde má nějaký informační smysl součet hodnot sledované náhodné proměnné.

Výpočet střední hodnoty (průměru) μ pro základní soubor:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

Střední hodnota μ představuje přesný (skutečný) parametr základního souboru a její výpočet je možný pouze teoreticky, protože počet hodnot základního souboru (N) není většinou přesně znám (teoreticky je roven ∞).

Pro odhad teoretické skutečné střední hodnoty základního souboru se používá aritmetický průměr $\bar{x}$, který lze empiricky vypočítat pro výběrový soubor, s použitím konečného počtu n jedinců náhodně vybraných ze základního souboru:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Příklad 3.1: Předpokládejme, že jsme v experimentu dostali řadu 17 členů:

5, 2, 5, 7, 13, 4, 10, 9, 5, 6, 8, 3, 5, 9, 6, 4, 5

Variační řada: 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 13

Výpočet aritmetického průměru:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{106}{17} = 6{,}24$$

Z vypočtené hodnoty vidíme, že aritmetický průměr nemusí být (oproti mediánu nebo modusu) skutečně se vyskytující obměnou dané proměnné. Má však řadu důležitých **vlastností**, které nemá např. medián. K nim patří např.:

- Průměr je ovlivněn extrémními hodnotami, pokud se v souboru vyskytují (neboli: při změně kterékoli hodnoty x_i se mění i průměr souboru). Pod pojmem extrémní hodnoty souboru rozumíme tzv. *odlehlá pozorování*, což bývá obvykle jedna nebo několik málo hodnot náhodné proměnné, které jsou oproti ostatním zjištěným hodnotám příliš malé nebo příliš velké. Průměr je správnou charakteristikou středu souboru pouze tehdy, je-li soubor z hlediska zkoumaného znaku dostatečně stejnorodý (odpovídá Gaussovu normálnímu rozdělení pravděpodobností). V ostatních případech, hlavně při malém rozsahu souboru, může být aritmetický průměr zkreslen případnými extrémními hodnotami souboru a není pak správnou charakteristikou středu souboru (to platí i v případě nepravidelných či vícevrcholových rozdělení četností).
- Vynásobí-li se aritmetický průměr rozsahem souboru, získá se vždy součet hodnot dané proměnné (nahradíme-li jednotlivé hodnoty znaku jejich průměrem, součet souboru se nezmění):

  $$\sum x_i = n.\bar{x}$$

  Tato vlastnost vyplývá přímo z definice aritmetického průměru.
- Součet odchylek jednotlivých hodnot sledované proměnné od jejich aritmetického průměru je vždy nulový:

  $$\sum (x_i - \bar{x}) = 0$$

  Tato vlastnost vyplývá bezprostředně z předchozí vlastnosti a tím i z definice aritmetického průměru.
- Přičte-li se ke všem hodnotám (odečte-li se od všech hodnot) proměnné *X* libovolná kladná hodnota *a*, potom je i aritmetický průměr větší (menší) o tuto konstantu:

  $$\overline{X \pm a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i \pm a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \pm \frac{1}{n} na = x \pm a$$
- Násobí-li se všechny hodnoty proměnné *X* nenulovou konstantou ($g \neq 0$), potom je i aritmetický průměr znásoben touto konstantou.

  $$\overline{X \,.\, g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i g = g\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = x \,.\, g$$

Aritmetický průměr, počítaný výše uvedeným způsobem z řady *n* hodnot x_i jejich součtem a následným dělením počtem hodnot, se nazývá prostý (jednoduchý) aritmetický průměr. Jestliže máme pro výpočet průměru k dispozici již sestavenou tabulku četností (známe rozdělení četností), můžeme počítat $\bar{x}$ podle vzorce ***váženého aritmetického průměru***, v němž jednotlivé varianty znaku násobíme jejich četnostmi výskytu. Toho lze využít především u spojitých veličin, kde pracujeme s třídami a jejich četnostmi. Pokud počet tříd označíme *k*, středy třídy v tomto případě představují jednotlivé hodnoty x_i, které násobíme četnostmi jednotlivých tříd (f_i), čímž dostaneme vážený aritmetický průměr:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \,.\, f_i}{n}$$

Při tomto způsobu výpočtu aritmetického průměru, jsou jednotlivým variantám proměnné *X* přisuzovány různé závažnosti (váhy), dané v tomto případě absolutními četnostmi jejich výskytu v jednotlivých třídách.

Na závěr je vhodné připomenout, že výše uvedené vlastnosti aritmetického průměru jsou zcela obecné, tzn. mají pochopitelně plnou platnost nejen pro prostý aritmetický průměr, ale i pro aritmetický průměr vážený.

Kromě aritmetického průměru (prostého či váženého), patří do skupiny průměrů, tzn. středních hodnot, které jsou funkcí všech hodnot dané proměnné a jsou tedy ovlivněny případnými extrémními hodnotami souboru, také geometrický průměr, harmonický průměr, kvadratický průměr aj. Tyto střední hodnoty jsou však jako popisné statistické charakteristiky souboru používány v mnohem menší míře a pouze ve speciálních situacích.

3.1.2 Geometrický průměr (The Geometric Mean)

Označení: μ_G (základní soubor), $\bar{x}_G$ (výběrový soubor)

Geometrický průměr řady *n* kladných hodnot x_i je definován jako *n*-tá odmocnina ze součinu všech hodnot:

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \,.\, x_2 \ldots\ldots x_n}$$

Geometrický průměr má smysl všude, kde má nějaký informační smysl součin hodnot proměnné. Z praktického hlediska platí, že logaritmus geometrického průměru je roven aritmetickému průměru logaritmovaných hodnot souboru. Geometrický průměr je tedy možno využít např. v korelačním počtu (hodnocení závislosti kvantitativních znaků viz kap. 9), kdy po transformaci hodnot sledované proměnné pracujeme s logaritmy původně naměřených hodnot.

Příklad 3. 2: Pro data z příkladu 3. 1 bychom dostali následující výpočet geometrického průměru (metodou antilogaritmování průměru logaritmů naměřených hodnot):

$$x_G = \sqrt[17]{2.3.4.4.5.5.5.5.5.6.6.7.8.9.9.10.13}$$

$$\log x_G = \frac{1}{17}(\log 2 + \log 3 + \log 4 + ... + \log 13) = \frac{1}{17}(0{,}30103 + 0{,}47712 + 0{,}60206 + ...1{,}11394) =$$

$$= \frac{12{,}80403}{17} = 0{,}75318$$

Antilog 0,75318 = x_G = 5,665

Při srovnání tohoto vypočteného geometrického průměru s aritmetickým průměrem vypočteným pro stejná data (Příklad 3.1), můžeme potvrdit, že obecně platí zásada, že geometrický průměr posloupnosti nestejných kladných hodnot je menší než jejich aritmetický průměr.

3.1.3 Harmonický průměr (The Harmonic Mean)

Označení: μ_H (základní soubor), x_H (výběrový soubor)

Harmonický průměr řady n kladných hodnot x_i je definován jako počet těchto hodnot, dělený součtem převrácených hodnot:

$$x_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Harmonický průměr má smysl všude, kde má nějaký informační smysl součet převrácených hodnot proměnné. Ze vzorce pro výpočet je zřejmé, že převrácená hodnota harmonického průměru je aritmetickým průměrem převrácených hodnot proměnné x_i. Platí tedy vztah:

$$\frac{1}{x_H} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}{n} = \overline{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Harmonický průměr lze využít např. v situacích, kdy je potřeba zjistit dobu nutnou průměrně ke stanovení nějakého úkonu, kdy všichni jedinci souboru provádějí dané úkony současně. Harmonický průměr pak představuje průměrnou délku času pro takový úkon. Výpočet se provádí z praktického hlediska tak, že se hodnoty x_i (jednotlivé časy potřebné pro provedení daného úkonu) převedou na převrácené hodnoty $1/x_i$, vypočte se aritmetický průměr těchto převrácených hodnot podle pravé části výše uvedeného vztahu a doba potřebná průměrně ke stanovení daného úkonu x_H se získá jako převrácená hodnota v levé části uvedené rovnice.

3.1.4 Medián (The Median)

Označení: $\tilde{\mu}$ (základní soubor), $\tilde{x}$ (výběrový soubor)

Medián je definován jako taková hodnota variační řady uspořádané podle velikosti, která rozděluje řadu na dvě stejně velké části co do počtu hodnot tak, že hodnoty dané proměnnév jedné části jsou menší (případně rovny) než medián, v druhé pak větší než medián. Je to tedy *prostřední hodnota* variační řady souboru v případě lichého počtu hodnot v řadě. Při sudém rozsahu souboru existují dvě prostřední hodnoty variační řady. V tomto případě se medián definuje jako aritmetický průměr (poloviční součet) těchto dvou prostředních hodnot.

U větších souborů je vhodné vypočítat člen variační řady, který je mediánem (pořadové číslo člena řady), pomocí následujícího vzorce:

Pořadové číslo : $\frac{n+1}{2}$

Příklad 3. 3: Řada hodnot uvedených v Příkladu 3.1 má 17 členů. Pro výpočet mediánu je nutno seřadit tato hodnoty do variační řady podle velikosti. Medián bude pak tvořen prostředním tj. devátým členem v uspořádané řadě hodnot. Devátý člen představuje hodnota 5, je tedy $\tilde{x} = 5$. Pořadové číslo pro člen řady, který je mediánem by se vypočetlo jako:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Pokud bychom si odmysleli v této řadě první hodnotu (2), abychom dostali sudou řadu členů, pak by pro zbývajících 16 členů řady 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 13 jsou prostřední hodnoty osmá a devátá (tedy 5 a 6), jejichž průměr je 5,5 a je tedy mediánem této variační řady hodnot. Pořadové číslo pro tento medián by se vypočetlo jako:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5$$

Vlastnosti mediánu:

Z definice mediánu a uvedených výpočtů je patrné, že medián je konkrétní hodnota (respektive někdy poloviční součet dvou konkrétních hodnot), která není přímo ovlivněna velikostí všech hodnot dané proměnné (není funkcí všech hodnot proměnné). To má někdy své výhody. Je to zejména v případě, kdy se vyskytují náhodně jedna nebo několik málo mimořádně extrémních (oproti ostatním hodnotám příliš malých nebo příliš velkých) hodnot proměnné. V tomto případě je vhodné, že medián (podobně jako modus) na rozdíl od průměru, není těmito odlehlými pozorováními ovlivněny a poskytuje tak dobrou představu o objektivní poloze prostřední hodnoty a tím i o úrovni hodnot sledované proměnné.

Medián můžeme definovat i jako 50% kvantil rozdělení sledované proměnné (rozděluje soubor na 2 stejně četné poloviny: hodnoty menší než medián a hodnoty větší než medián). Lze ho tedy použít jako vhodnou charakteristiku středu souboru i v případě veličin s neznámým rozdělením (nepravidelným, vícevrcholovým apod.)

3.1.5 Modus (The Mode)

Označení**:** $\hat{\mu}$ (základní soubor), $\hat{x}$ (výběrový soubor)

Modus je definován jako nejčastěji se vyskytující hodnota proměnné v souboru (hodnota s největší četností). Vždy odpovídá vrcholu křivky rozdělení. V tabulce rozdělení četností (např. tab.1.1) se modus určí jednoduše z hodnoty znaku s největší četností. Pro data v uvedeném příkladu 3.1 je modem hodnota 5. Vyskytuje se v řadě 5krát, zatímco četnost ostatních hodnot je menší.

V rozděleních četností, kde jsou jednotlivé hodnoty řazeny do tříd s třídními intervaly (tj. u intervalového rozdělení četností), mluvíme o modálním intervalu (třída s nejvyšší četností).

Vlastnosti modu:

Z definice modu je patrné, že modus je konkrétní hodnota, která není přímo ovlivněna velikostí všech hodnot dané proměnné (není funkcí všech hodnot proměnné). Proto modus (podobně jako medián) není zkreslen případnými extrémními hodnotami souboru. Lze ho tedy použít jako vhodnou charakteristiku středu souboru i v případě veličin s neznámým rozdělením (nepravidelným, vícevrcholovým apod.)

3. 2 Charakteristiky variability (proměnlivosti souboru)

Statistické znaky jako číselné proměnné jsou na rozdíl od konstant, které mají nulovou variabilitu, vždy variabilní (proměnlivé). Různé proměnné, resp. stejné proměnné v různých statistických souborech mají zpravidla různý stupeň variability. Malý stupeň variability (blízký nulové variabilitě) znamená malou vzájemnou různost hodnot dané proměnné, a tedy velkou podobnost těchto hodnot, což zároveň signalizuje, že střední hodnota (průměr), medián a případně i modus jsou v tomto případě dobrými charakteristikami obecné velikosti hodnot dané proměnné v daném souboru. Naopak vysoká variabilita značí velkou vzájemnou odlišnost hodnot dané proměnné, což zároveň signalizuje, že vypočítané parametry středu souboru nejsou v tomto případě dobrými charakteristikami obecné výše hodnot dané proměnné v daném souboru.

Střední hodnoty (průměr, medián, modus) jako ukazatel polohy udávají pouze informaci o poloze statistického souboru na číselné ose, ale neudávají, jak jsou hodnoty v souboru rozptýleny (kolísání kolem středu), případně, zda existují v souboru tzv. extrémní hodnoty. Tuto informaci poskytují tzv. **míry variability** (charakteristiky variability), které vyjadřují rozmístění hodnot dané proměnné okolo střední hodnoty celého souboru. Míry variability slouží tedy jako **ukazatel rozptýlení**, kterým lze charakterizovat (spolu s ukazetelem polohy) rozdělení četností hodnot (pravděpodobností) sledované proměnné ve statistickém souboru.

K měření stupně variability ve statistickém souboru se používá několik charakteristik variability, které jsou vesměs koncipovány tak, že jejich nulová hodnota znamená konstantnost nebo jinak řečeno nulovou variabilitu, kdežto jejich vyšší kladné hodnoty naznačují zpravidla, že jde o vyšší stupeň variability. Je tedy jasné, že žádná z charakteristik variability nemůže nabýt zápornou číselnou hodnotu.

3.2.1 Variační rozpětí (The Range)

Variační rozpětí $\boldsymbol{R}$ (z anglického slova range – rozsah, rozpětí) řady n čísel je definováno jako rozdíl mezi největší a nejmenší hodnotou řady (rozdíl mezi největší a nejmenší hodnotou znaku v souboru):

$$\boldsymbol{R} = x_{max} - x_{min}$$

Variační rozpětí je velmi přibližnou charakteristikou variability hodnot sledované numerické proměnné, neboť je příliš ovlivněno velikostí extrémních hodnot, které mohou být mnohdy odlehlými pozorováními.

Tento nedostatek R překonávají rozpětí kvantilů, z nichž nejpoužívanější je *kvartilové rozpětí* R_q:

$$R_q = x_{0,75} - x_{0,25}$$

Je zřejmé, že variační rozpětí ani kvantilová rozpětí neberou při charakterizování variability v úvahu velikost všech hodnot sledované numerické proměnné, což je mnohdy pociťováno jako závažný nedostatek. Ten překonávají charakteristiky variability, které jsou funkcí všech pozorování. Nejpoužívanější z nich jsou ty, které jsou založeny na součtu čtverců odchylek jednotlivých hodnot x_i od aritmetického průměru ($\sum (x_i - \mu)^2$ pro základní soubory nebo $\sum (x_i - x)^2$ pro výběrové soubory). Tyto charakteristiky variability jsou považovány obvykle za nejdokonalejší, neboť navazují na dříve vedené vlastnosti aritmetického průměru. Jde o rozptyl (varianci) a směrodatnou odchylku (SD – standardní deviaci, z angl. standard deviation).

3.2.2 Rozptyl (variance, The variance)

Označení**:** σ^2 (základní soubor), s^2 (výběrový soubor)

Rozptyl řady n hodnot x_1, x_2,……x_n je definován (pohlíži-li se na daný soubor jako na populaci, kde $n = N$) jako aritmetický průměr čtverců odchylek jednotlivých hodnot sledované proměnné x_i od průměru celého souboru:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N} \qquad \text{(rozptyl \textbf{základního souboru})}$$

Pohlíží-li se na daný soubor jako na výběrový (vzorek ze základního souboru), potom mluvíme o *výběrovém rozptylu* s^2, který slouží jako odhad skutečného rozptylu populace a jeho výpočet se poněkud liší. U výběrového rozptylu se ve jmenovateli zlomku používá výraz (n-1), který označujeme jako *počet stupňů volnosti* výběrového souboru (blíže viz kap. 4: Odhady parametrů základního souboru). Použitím tohoto výrazu (n-1) místo prosté velikosti souboru n docílíme přesnějšího odhadu skutečné hodnoty populačního rozptylu, především při výpočtu na základě malých výběrových souborů:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2}{n-1} \qquad \text{(rozptyl \textbf{výběrového souboru})}$$

Je zřejmé, že rozdíl mezi rozptylem σ^2 na jedné straně a výběrovým rozptylem s^2 na druhé straně je při velkém rozsahu souboru (n > 30) prakticky zanedbatelný. Zároveň je jasné, že z rozptylu σ^2 získáme násobením $n/n\text{-}1$ výběrový rozptyl s^2 a také naopak: z výběrového rozptylu s^2 získáme násobením $(n\text{-}1)/n$ rozptyl základního souboru σ^2.

Při praktických výpočtech podle výše uvedeného vzorce výběrového rozptylu by byl postup příliš zdlouhavý (především u velkých výběrových souborů), proto je možno pro usnadnění použít ještě jinou variantu vzorce pro výpočet výběrového rozptylu:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Výpočet podle tohoto vzorce („výpočtový tvar rozptylu“) je při praktickém postupu mnohem jednodušší, protože na rozdíl od předchozí varianty vzorce pro výběrový rozptyl zahrnuje méně výpočetních úkonů, což snižuje pravděpodobnost možných chyb v případě „ručních“ výpočtů.

Vlastnosti rozptylu:

Jestliže jsou všechny hodnoty souboru stejné, potom je variabilita hodnot sledované proměnné v souboru nulová a výběrový rozptyl $s^2 = 0$.

Velikost rozptylu se zvyšuje při zvětšující se variabilitě hodnot sledované proměnné. Protože rozptyl je odvozen od součtu čtverců odchylek jednotlivých hodnot od průměru souboru, nemůže nikdy nebývat záporných hodnot.

Přičte-li se ke všem hodnotám (odečte-li se od všech hodnot) proměnné X libovolná kladná konstanta a, potom se rozptyl nezmění:

$$\sigma^2(X \pm a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i \pm a - \overline{x \pm a}\right)^2 = \sigma^2$$

Z této vlastnosti plyne, že rozptyl nepovažuje za změnu variability žádný případ, při němž se nemění absolutní rozdíly mezi jednotlivými hodnotami. Charakterizuje tak tzv. *absolutní variabilitu,* k jejímuž zvětšení (zmenšení) dochází pouze tehdy, zvětšují-li se (zmenšují-li se) absolutní rozdíly mezi jednotlivými hodnotami dané číselné proměnné.

Násobí-li se (dělí-li se) všechny hodnoty proměnné nenulovou konstantou g, potom je rozptyl znásoben (vydělen) čtvercem této konstanty:

$$\sigma^2(g.X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(g.x_i - \overline{g.X}\right)^2 = g^2.\sigma^2$$

Z definice rozptylu je zřejmé, že rozptyl je uveden ve čtvercích měrných jednotek hodnot sledovaných číselných proměnných. Např.: jestliže budou hodnoty sledované proměnné vyjádřeny v gramech, také jejich rozptyl bude v gramech. Jestliže hodnoty sledované proměnné budou vyjádřeny v cm^2, rozptyl těchto hodnot bude vyjádřen v $(cm^2)^2$, bez ohledu na to, že takové jednotky nemají žádný fyzikální význam.

Vyjádření rozptylu ve čtvercích měrných jednotek je jedním z hlavních důvodů, že se při praktickém měření variability přeměňuje rozptyl na standardní deviaci (směrodatnou odchylku), která má stejné měrné jednotky jako hodnoty sledované proměnné.

3.2.3 Směrodatná odchylka (standardní deviace, Standard Deviation - SD)

Označení**:** σ (základní soubor), s (výběrový soubor)

Směrodatná odchylka je definována jako (kladná) druhá odmocnina z rozptylu, tj.

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ pro základní soubor,

resp. jako

$s = \sqrt{s^2}$ pro výběrový soubor.

Výpočet **směrodatné odchylky pro základní soubor** je tedy:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}} \quad \text{nebo} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{N}}{N}}$$

a výpočet **výběrové směrodatné odchylky** pro výběrový soubor je:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \text{nebo} \quad s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}}{n-1}}$$

Vlastnosti směrodatné odchylky:

Směrodatná odchylka má stejné měrné jednotky jako sledovaná číselná proměnná ve statistickém souboru (odmocněním rozptylu se čtverce měrných jednotek číselných proměnných v rozptylech převedou zpět do lineárního tvaru).

Jak vyplývá z výše uvedené definice, směrodatná odchylka může nabývat vždy pouze kladných hodnot.

Označíme-li ve vzorci směrodatné odchylky proměnné *X* odchylky hodnot této proměnné od aritmetického průměru jako $x_i - \bar{x} = d_i$, *i = 1, 2, ..., n*, pak je ze vzorce směrodatné odchylky:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n}}$$

patrné, že směrodatná odchylka je kvadratickým průměrem z odchylek jednotlivých hodnot od jejich aritmetického průměru. A právě tato skutečnost je dalším důvodem zavedení směrodatné odchylky jako míry *absolutní variability*, neboť umožňuje interpretovat vypočítanou směrodatnou odchylku v tom smyslu, že udává, jak se v průměru v daném statistickém souboru odchylují hodnoty sledované proměnné od aritmetického průměru souboru.

Příklad 3. 4: Byla sledována hmotnost králíků v laboratorním chovu. Vážením náhodně vybraných 12 králíků z tohoto chovu byly zjištěny následující hmotnosti (v kg):

2,7; 3,1; 2,9; 2,7; 3,0; 2,8; 2,9; 2,9; 3,1; 3,3; 2,8; 2,7.

Jak velkou směrodatnou odchylku vykazují zjištěné hodnoty hmotností od aritmetického průměru hmotnosti v tomto chovu?

$n = 12$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{34{,}9}{12} = 2{,}9083\ kg$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{101{,}89 - \frac{(34{,}9)^2}{12}}{12-1} = 0{,}0354\ kg^2$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}0354} = 0{,}1881\ kg$$

Závěr: Směrodatná odchylka, kterou vykazují zjištěné hmotnosti vybraných králíků od průměrné hmotnosti králíků v chovu (2,9083 kg) je 0,1881 kg.

Charakteristiky absolutní variability (zejména směrodatná odchylka) jsou nesporně velmi vhodné pro srovnání variability hodnot ordinálních statistických znaků (proměnných) ve dvou případně více souborech, neboť odlišnosti obměn ordinálních proměnných jsou plně charakterizovány jejich absolutnímo rozdíly. Jinak řečeno: celková variabilita hodnot ordinální proměnné je totožná s absolutní variabilitou.

Jinak je tomu u kardinálních statistických znaků, kdy pociťujeme, že celková variabilita hodnot kardinální proměnné není dostatečně charakterizována měrami absolutní variability. Tak např. hodnoty tělesné hmotnosti 2 kg u 50% králíků a 3 kg u druhé poloviny jedinců jednoho souboru mají stejnou absolutní variabilitu jako hmotnosti ve druhém souboru (např. selata), kde má polovina jedinců hmotnost 52 kg a zbytek 53 kg, přestože absolutní rozdíl 1 kg je relativně značný u souboru králíků, ale tentýž absolutní rozdíl je u souboru selat relativně zanedbatelný. V souboru selat je tedy zřejmě celková variabilita nižší.

Podobné nelogičnosti při srovnávání variability pomocí charakteristik absolutní variability u kardinálních proměnných vedly k tomu, že byly zavedeny charakteristiky relativní variability, které jsou vesměs definovány jako míry absolutní variability, dělené nějakou střední hodnotou, nejčastěji aritmetickým průměrem. Nejpoužívanější charakteristikou relativní variability je variační koeficient (koeficient variace).

3.2.4 Variační koeficient („relativní směrodatná odchylka“, **The Coefficient of Variation**)

Variační koeficient používáme, máme-li vzájemně srovnávat variabilitu dvou nebo více souborů s podstatně odlišnou úrovní hodnot. Jak bylo uvedeno výše, těžko lze srovnávat pomocí prosté směrodatné odchylky např. variabilitu tělesné hmotnosti v kg u králíků a selat nebo dokonce variabilitu váhy kuřat v gramech a variabilitu váhy jatečného skotu v kg nebo metrických centech. V těchto případech musíme odstranit vliv obecné úrovně daných hodnot. Děláme to tak, že směrodatnou odchylku dělíme střední hodnou, od které byly počítány odchylky pro součet čtverců, obvykle tedy při praktických výpočtech aritmetickým průměrem výběrového souboru. Výsledek se obyčejně vyjadřuje v procentech (po vynásobení 100).

Variační koeficient, který označujeme nejčastěji jako *V*, je tedy definován pro základní soubor jako:

$$V = \frac{\sigma * 100}{\mu} \ [\%]$$

Pro výběrový soubor vypočteme prakticky variační koeficient podle vzorce:

$$V = \frac{s * 100}{\bar{x}} \ [\%]$$

Vlastnosti variačního koeficientu:

Variační koeficient je relativní mírou variability a tedy není ovlivněn absolutními hodnotami sledovaného statistického znaku jako směrodatná odchylka.

V případě vyjádření v procentech, variační koeficient udává, z kolika procent se podílí směrodatná odchylka na aritmetickém průměru.

Přičte-li se ke všem hodnotám (odečte-li se od všech hodnot) dané proměnné libovolná kladná konstanta *a*, potom se variační koeficient zmenší (zvětší). Platí tedy :

$$V(X + a) = \frac{\sigma}{\bar{x} + a} < \frac{\sigma}{\bar{x}} = V$$

resp.:

$$V(X - a) = \frac{\sigma}{\bar{x} - a} > \frac{\sigma}{\bar{x}} = V$$

Z těchto vlastností plyne, že při stejné absolutní variabilitě v různých souborech může být naprosto různá relativní variabilita, neboť při

$$\sigma(X + a) = \sigma(X) = \sigma(X - a)$$

je současně

$V(X + a) < V(X) < V(X - a)$

Násobí-li (dělí-li) se všechny hodnoty proměnné *X* nenulovou konstantou *g*, potom se variační koeficient nezmění. Platí tedy:

$$V(g.X) = \frac{g.\sigma}{g.\bar{x}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = V$$

Příklad 3.5: Jsou dány dva výběrové soubory A a B:

A: 1, 11, 11, 12, 14, 14, 14, 27

B: 1, 2, 3, 5, 9, 10, 13, 16, 17, 21, 22, 23, 27

Můžeme vidět, že oba výběry mají stejné variační rozpětí a mají také stejný aritmetický průměr ($x = 13$). Přesto se jedná o dva zcela rozdílné soubory čísel. Směrodatné odchylky reprezentující míru absolutní variability souborů se navzájem poněkud liší: u souboru A je hodnota směrodatné odchylky 7,09 a u souboru B je to 8,76. Odpovídající variační koeficienty obou souborů tedy jsou (v procentech):

Pro soubor A: $V = \frac{7{,}09.100}{13} = 54{,}5\ \%$

Pro soubor B: $V = \frac{8{,}76.100}{13} = 67{,}4\ \%$

Vidíme tedy, že absolutní i relativní variabilita je u obou souborů přibližně srovnatelná. U těchto souborů, které mají stejnou obecnou úroveň, není nutno variační koeficient počítat. Chceme-li však s nimi srovnávat variabilitu řady hodnot z příkladu 2.4, je tento výpočet nutný. Pro hodnoty z příkladu 2.4 dostaneme:

$$V = \frac{0{,}1881.100}{2{,}9083} = 6{,}5\ \%$$

Váhy laboratorních králíků z příkladu 3.4 tedy kolísají pouze o 6,5 % okolo průměru, což můžeme považovat za velmi nízkou variabilitu. Naopak u souborů zvolených čísel A a B v příkladu 3.5 je variabilita již dosti vysoká.

3.2.5 Střední chyba průměru (Standard Error of Mean - SE, SEM)

Označení: σ_x (základní soubor), s_x (výběrový soubor)

Mezi často používané relativní míry variability lze dále zařadit i tzv. *střední* neboli *směrodatnou chybu průměru*, často označovanou (především v zahraniční odborné literatuře) zkratkou SE (příp. SEM) – z anglického výrazu Standard Error of Mean. Střední chyba průměru neměří rozptýlenost původní náhodné proměnné, ale rozptýlenost vypočítaného aritmetického průměru v různých výběrových souborech vybraných z jednoho základního souboru.

Střední (směrodatná) chyba průměru je teoreticky definována jako směrodatná odchylka všech možných výběrových průměrů z jedné populace, vypočítaných pro výběry o rozsahu n členů. Střední chyba průměru tedy vyjadřuje kolísání výběrových průměrů kolem teoretické (skutečné) střední hodnoty μ v celém základním souboru.

Jak vyplývá z definice, střední chyba průměru závisí jednak na rozptylu základního souboru (σ^2), jednak na rozsahu výběrového souboru (n):

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Protože obvykle neznáme skutečnou hodnotu rozptylu σ celého základního souboru, používáme v praxi výpočet pro ***výběrovou střední chybu průměru*** podle vzorce:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Výběrová střední chyba průměru ($s_{\bar{x}}$) může být použita jako míra přesnosti, s jakou výběrový aritmetický průměr $\bar{x}$ odhaduje skutečnou střední hodnotu μ. Prakticky se používá pro výpočet intervalů spolehlivosti aritmetického průměru u výběrových souborů (blíže viz kap. 4: Odhady parametrů základního souboru).

Kapitola 4

Odhady parametrů základního souboru

Jak již bylo řečeno, v praxi obvykle zkoumáme vlastnosti základního souboru – populace – prostřednictvím výběrových dat, tj. hodnot zkoumaného statistického znaku (případně i více znaků) získaných při výběrovém statistickém šetření. Na základě těchto dat pak provádíme zevšeobecňující úsudek, tzn. usuzujeme na obecnější skutečnosti, které se týkají celé populace. Jedná se tedy o induktivní uvažování, které s sebou nese riziko nesprávného úsudku. Toto riziko omylu je tím větší, čím je základní soubor z hlediska sledovaného znaku variabilnější a čím je méně reprezentativní výběrový soubor. Jeho snížení je možno dosáhnout za určitých podmínek zvětšením rozsahu výběru. Při tomto procesu zevšeobecňování je třeba vyloučit subjektivní vlivy a provádět ho pomocí objektivních metod matematické statistiky. Matematicko-statistické metody vycházejí z předpokladu, že výběrová data byla pořízena náhodným výběrem, tj. takovým výběrem, kdy o tom, zda určitý člen základního souboru bude vybrán či nikoli, rozhoduje pouze náhoda. Tento předpoklad umožňuje využívat teorii pravděpodobnosti, pokud je to možné kvantifikovat (nebo předem volit) riziko omylu a tak hodnotit přesnost a spolehlivost získaných výsledků. Induktivní usuzování pomocí matematicko-statistických metod se někdy nazývá statistická indukce.

Jednou ze základních úloh statistického usuzování (statistické indukce) je **odhadování** neznámých parametrů základního souboru pomocí údajů získaných náhodným výběrem z daného základního souboru.

Důležitým rysem statistické metody odhadování je její **pravděpodobnostní charakter** (při jakémkoli úsudku, který o základním souboru učiníme na základě údajů získaných náhodným výběrem, musíme počítat s možností, že tento úsudek je chybný). Číselné charakteristiky výběrových souborů se poněkud liší od charakteristik základního souboru a také charakteristiky různých výběrových souborů z téže populace jsou různé, což je způsobeno variabilitou ve složení různých náhodně vybraných výběrových souborů.

Podle typu rozdělení, kterým se řídí základní soubor (Gaussovo normální rozdělení nebo neznámé rozdělení) je možno na základě dat výběrových souborů z tohoto rozdělení zjistit různé charakteristiky (např. průměr, směrodatná odchylka - u normálního rozdělení; medián - u neznámého rozdělení), které se v jistém smyslu blíží k odpovídajícím charakteristikám základního souboru (jsou jejich odhadem).

Odhad parametrů základního souboru na základě charakteristik výběrových souborů lze provést v zásadě dvěma způsoby (metodami): bodovým nebo intervalovým odhadem.

1) Bodový odhad – bodovým odhadem odhadujeme neznámý parametr základního souboru pomocí jediného čísla, bodu. Bodovým odhadem parametru základního souboru jsou popisné statistiky (charakteristiky) výběrového souboru, protože rozdělení četností výskytu hodnot v náhodném výběru je odrazem rozdělení pravděpodobností výskytu hodnot v základním souboru.

Při bodovém odhadu tedy na základě dat výběrového souboru prohlašujeme, že neznámý parametr základního souboru se rovná určité (vypočtené) hodnotě sledované náhodné veličiny.

2) Intervalový odhad – intervalovým odhadem odhadujeme neznámý parametr základního souboru pomocí dolní a horní hranice intervalu hodnot, mezi nimiž se parametr základního souboru nachází s určitou (zvolenou) pravděpodobností. Na základě dat výběrového souboru určujeme oblast číselných hodnot sledované náhodné proměnné (tzv. interval spolehlivosti, konfidenční interval), v níž leží s dostatečnou pravděpodobností neznámý parametr základního souboru.

Intervalové odhady parametrů základního souboru umožňují vyjádřit chybu, kterou je odhad parametru základního souboru na základě statistik výběrového souboru zatížen. Chyba odhadu je dána tím, že charakteristiky (statistiky) výběrového souboru jsou náhodné veličiny. Např. vybereme-li ze základního souboru 10 hodnot do výběrového souboru a provedeme bodový odhad parametru základního souboru a vybereme-li ze základního souboru jiných 10 hodnot do výběrového souboru a provedeme opět bodový odhad parametru získáme hodnotu, která se může lišit od předchozího odhadu, i když se jedná o dva výběry ze stejného základního souboru. Každý bodový odhad parametru základního souboru pomocí statistiky výběrového souboru je tedy zatížen určitou chybou odhadu, nepřesností. Tato chyba je tím menší, čím větší je rozsah *n* výběrového souboru.

4.1 Odhad parametrů souboru s Gaussovým normálním rozdělením

U souborů dat, které se řídí normálním rozdělením pravděpodobností lze odhadovat dva parametry, používané pro charakteristiku Gaussovy křivky: parametr μ (střední hodnota) a parametr σ (směrodatná odchylka), případně σ^2 (rozptyl).

4.1.1 Odhad parametru μ (střední hodnota)

Bodový odhad μ:

Bodovým odhadem parametru μ (střední hodnota) základního souboru s Gaussovým normálním rozdělením je aritmetický průměr $\bar{x}$ vypočítaný na základě dat výběrového souboru. Můžeme tedy psát:

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Intervalový odhad μ:

Intervalový odhad spočívá ve výpočtu **dolní** a **horní meze intervalu spolehlivosti (m_1, m_2),** mezi nimiž se střední hodnota (parametr μ) základního souboru nachází s určitou (zvolenou) pravděpodobností **:**

$$m_{1,2} = \bar{x} \pm s_{\bar{x}} * t_{1-\alpha/2(\nu)}$$

$t_{1-\alpha/2}$ - koeficient spolehlivosti (1-α/2 kvantil Studentova rozdělení), který odpovídá určité (zvolené) pravděpodobnosti chyby α, s jakou provádíme intervalový odhad (pro biologická data volíme zpravidla $\alpha = 0{,}05$, při požadavku větší přesnosti můžeme volit $\alpha = 0{,}01$). Zvolená pravděpodobnost chyby α tak určuje tzv. ***hladinu významnosti***, na které je odhad prováděn a udává zároveň **spolehlivost (1-α)** počítaného intervalového odhadu. Při zvolení pravděpodobnosti chyby α = 0,05, tedy metodou intervalového odhadu vypočítáme konfidenční interval se spolehlivostí 95 %.

Koeficient spolehlivosti vyhledáme v tabulkách kvantilů Studentova rozdělení podle zvolené chyby α a stupňů volnosti $\nu = n-1$ výběrového souboru (viz Příloha Tab. č. 3 Kvantily Studentova *t*-rozdělení).

$s_{\bar{x}}$ - **střední chyba průměru**

Střední chyba průměru vyjadřuje kolísání výběrových průměrů kolem skutečné střední hodnoty μ základního souboru:

Střední chyba průměru: $s_{\bar{x}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}}{}_{\bar{x}}$

4.1.2 Odhad parametru σ^2 (rozptyl)

Bodový odhad σ^2:

Bodovým odhadem parametru σ^2 (rozptyl) základního souboru s Gaussovým normálním rozdělením je výběrový rozptyl s^2, vypočtený na základě dat výběrového souboru. Můžeme tedy psát:

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

Výraz ***n-1*** ve jmenovateli zlomku se nazývá **počet stupňů volnosti (*ν*)** výběrového souboru. Je mírou provázanosti hodnot souboru - ukazuje počet nezávislých veličin, které se vyskytují v definici daného parametru (při výpočtu rozptylu s^2 už známe $\bar{x}$ souboru - hodnoty souboru jsou tímto průměrem určitým způsobem "vázány", mají pouze *n-1* stupňů volnosti).

Známe-li totiž hodnotu $\bar{x}$ určitého souboru s "n" prvky, můžeme všem prvkům přidělit libovolné hodnoty kromě hodnoty n-té, která je určena již průměrem. Např. u souboru s pěti členy, který má průměr $\bar{x}$ =25, můžeme určit libovolně třeba tyto hodnoty: 1, 26, 73, 14. Aby však soubor měl skutečně průměr 25, musí být pátá hodnota stanovena vzhledem k průměru - tak, aby $\sum x_i$= 125 (5x25). Pátý člen tedy není volný, volné jsou jen 5-1=4 členy (obecně n-1). Říkáme, že po výpočtu průměru má soubor ještě n-1 stupňů volnosti.

Pozn.:

Výrazem *n-1* se odlišuje výpočet **odhadu rozptylu: s^2** (výběrové charakteristiky) od definice skutečného parametru σ^2 (pro základní soubor). Použitím výrazu *n-1* při výpočtu se zohlední chyba výběrového souboru vůči základnímu souboru (čím menší je *n* ve výběrovém souboru, tím větší je jeho chyba, a tím dostaneme i výrazně odlišnou hodnotu výběrového rozptylu s^2 od skutečného parametru σ^2).

Intervalový odhad σ^2:

Intervalový odhad spočívá ve výpočtu **dolní** a **horní meze intervalu spolehlivosti (*m_1, m_2*)**, mezi nimiž se rozptyl (parametr σ^2) základního souboru nachází s určitou (zvolenou) pravděpodobností **:**

$$m_1 = \frac{(n-1).s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2(\nu)}} \qquad m_2 = \frac{(n-1).s^2}{\chi^2_{\alpha/2(\nu)}}$$

$\chi^2_{1-\alpha/2(\nu)}$, $\chi^2_{\alpha/2(\nu)}$ - koeficienty spolehlivosti: tabulkové hodnoty - kvantily χ^2 rozdělení pro zvolené α a dané $\nu = n-1$

(viz Příloha Tab. č.4a, 4b Kritické hodnoty χ^2 rozdělení)

Příklad 4. 1: Byla sledována hmotnost laboratorních králíků v chovu. Vážením náhodně vybraných 12 králíků z tohoto chovu byly zjištěny následující hmotnosti (v kg):

2,7; 3,1; 2,9; 2,7; 3,0; 2,8; 2,9; 2,9; 3,1; 3,3; 2,8; 2,7.

Metodou bodového a intervalového odhadu zjistěte, jaká je průměrná hmotnost králíků v tomto chovu a jaký je rozptyl této hmotnosti.

$n = 12$

Bodový odhad parametru μ (střední hodnota) a parametru σ^2 (rozptyl) pro hmotnosti králíků v chovu:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{34{,}9}{12} = 2{,}9083\,kg$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{101{,}89 - \frac{(34{,}9)^2}{12}}{12-1} = 0{,}0354\,kg^2$$

Intervalový odhad parametru μ (střední hodnota) na hladině významnosti α = 0,05 (tj. 95 % meze *m_1*, *m_2* pro interval spolehlivosti):

$$m_1 = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}.\,t_{1-\alpha/2(n-1)} = 2{,}9083 - \frac{0{,}1881.2{,}201}{\sqrt{12}} = 2{,}7887 kg$$

$$m_1 = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}.\,t_{1-\alpha/2(n-1)} = 2{,}9083 + \frac{0{,}1881.2{,}201}{\sqrt{12}} = 3{,}0278\,kg$$

Intervalový odhad parametru σ^2 (rozptyl) na hladině významnosti α = 0,05 (tj. 95 % meze *m_1*, *m_2* pro interval spolehlivosti):

$$m_1 = \frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2(n-1)}} = \frac{0{,}0354.(12-1)}{21{,}92} = 0{,}0178\,\text{kg}^2$$

$$m_1 = \frac{s^2.(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2(n-1)}} = \frac{0{,}0354.(12-1)}{3{,}82} = 0{,}1019\,\text{kg}^2$$

Závěr:

Průměrná hmotnost králíků v laboratorním chovu leží s 95 % pravděpodobností v intervalu ⟨2,7887; 3,0278 kg⟩, bodovým odhadem hmotnosti králíků v chovu je hmotnost 2,9083 kg. Rozptyl hmotnosti králíků v chovu je s 95 % pravděpodobností v intervalu ⟨0,0178; 0,1019 kg^2⟩, bodovým odhadem rozptylu hmotnosti králíků v chovu je hodnota 0,0354 kg^2.

4.2 Odhad parametrů souboru s neznámým rozdělením

Pro charakteristiku souborů s neznámým rozdělením četností nemůžeme použít parametry μ a σ (jejich křivka rozdělení může být nepravidelná, obvykle asymetrická, někdy vícevrcholová). Za **střed** křivky je tady možno považovat **medián** $\tilde{\mu}$, **šířku** křivky nelze pro její nepravidelnost určovat. Medián je výstižnější střední hodnotou než aritmetický průměr i u souborů, v nichž se vyskytují ojedinělé extrémní hodnoty - tyto ovlivňují aritmetický průměr, který pak nesprávně charakterizuje střed souboru, kdežto medián není extrémními hodnotami ovlivněn.

Hodnota skutečného parametru mediánu základního souboru $\tilde{\mu}$ je odhadován pomocí výběrového mediánu $\tilde{x}$**,** vypočteného na základě dat výběrového souboru vybraného z dané populace (bodový odhad mediánu) a pomocí konfidenčního intervalu pro medián (intervalový odhad mediánu).

4.2.1 Odhad mediánu $\tilde{\mu}$

Bodový odhad $\tilde{\mu}$:

Bodovým odhadem mediánu $\tilde{\mu}$ základního souboru s neznámým rozdělením je **výběrový medián** $\tilde{x}$, vypočtený na základě dat výběrového souboru. Z definice mediánu můžeme tedy odvodit:

Výběrový medián u souboru s **lichým** počtem hodnot je roven prostřední hodnotě vzestupné variační řady.

Výběrový medián u souboru se **sudým** počtem hodnot je roven aritmetickému průměru dvou prostředních hodnot.

U větších výběrových souborů lze vypočítat pořadí hodnoty, která je výběrovým mediánem, jako:

$$R_{\tilde{x}} = \frac{n+1}{2}$$

$R_{\tilde{x}}$ - pořadové číslo výběrového mediánu ve variační řadě (liché i sudé).

Intervalový odhad $\tilde{\mu}$:

Intervalový odhad spočívá ve zjištění **dolní** a **horní meze intervalu spolehlivosti (m_1, m_2),** mezi nimiž se medián $\tilde{\mu}$ základního souboru nachází s určitou (zvolenou) pravděpodobností**:**

Dolní a horní mez intervalu (m_1,m_2) spolehlivosti mediánu jsou hodnoty odvozené z **tabulek** tak, že se podle počtu prvků výběrového souboru (***n***) a zvolené pravděpodobnosti chyby α vyhledá v tabulce pořadové číslo pro dolní (horní) mez a toto pořadové číslo se nahradí hodnotou, která mu odpovídá ve variační řadě hodnot výběrového souboru.

Příklad 4. 2:

Byla sledována tělesná hmotnost u výběrového souboru 14 psů určitého plemene. Zjistěte interval spolehlivosti pro skutečnou hodnotu mediánu základního souboru hodnot tělesné hmotnosti u daného plemene.

Zjištěné hopdnoty (v kg): 14.1; 16,4; 16,8; 14,3; 12,3; 14,9; 15,3; 12,8; 15,6; 13,5; 16,0; 16,2; 17,1; 17,0

Postup:

1) Podle velikosti výběrového souboru a zvolené hladiny významnosti α vyhledáme v tabulkách pořadová čísla pro dolní a horní mez intervalu spolehlivosti pro medián:
   $n = 14$
   $\alpha = 0.05$

Tab. 4.1 Pořadí pro dolní a horní mez intervalu spolehlivosti mediánu (část tabulky, α = 0.05)

n	Dolní mez	Horní mez
8	1	8
9	2	8
10	2	9
11	2	10
12	3	10
13	3	11
14	3	12
:	:	:
:	:	:
:	:	:
100	40	61

2) Seřadíme naměřené hodnoty do vzestupné variační řady (Tab. 4.2).

3) Nahradíme nalezená pořadová čísla (3 a 12) skutečnými hodnotami variační řady naměřených hodnot – tyto pak tvoří interval spolehlivosti mediánu:

Tab. 4.2 Variační řada výběru (*n* = 14) s vyznačenými mezemi m_1 a m_2 pro interval spolehlivosti mediánu.

x_1	12,3
x_2	12,8
x_3	**13,5**
x_4	14,1
x_5	14,3
x_6	14,9
x_7	15,3
x_8	15,6
x_9	16,0
x_{10}	16,2
x_{11}	16,4
x_{12}	**16,8**
x_{13}	17,0
x_{14}	17,1

5) Výpočet bodového odhadu mediánu:

Pořadové číslo mediánu: $R_{\tilde{x}} = \frac{14+1}{2} = 7{,}5$

Medián: $\tilde{x} = \frac{15{,}3 + 15{,}6}{2} = 15{,}45\ kg$

Závěr:

Skutečná hodnota tělesné hmotnosti psů daného plemene je v intervalu od 13,5 do 16,8 kg (se spolehlivostí na 95 %). Nejpravděpodobnější skutečnou hodnotou mediánu tělesné hmotnosti psů daného plemene je hodnota 15,45 kg.

Kapitola 5

Vylučování extrémních hodnot souboru

Při sledování biologických jevů bychom měli brát v úvahu jakoukoli hodnotu získanou při pozorování, někdy se však na pozadí více méně stejnorodých hodnot objeví hodnota silně odlišná – může to být vliv nějakého nového, neuvažovaného faktoru nebo chyba, způsobená např. při měření, v metodice apod. Takovou chybu (**hrubá chyba**) je nutno odlišit od **chyby náhodné**, která způsobuje výskyt zdánlivě odlišných hodnot v souboru – tyto však vznikají vlivem přirozené variability biologického materiálu. Takové hodnoty je třeba při statistickém zpracování brát do úvahy, kdežto hodnoty způsobené hrubou chybou je nutno ze souboru vyloučit.

Zde je třeba si uvědomit zásadní věc: k vyloučení hodnoty ze souboru jsme oprávněni jen tehdy, je-li velmi nepravděpodobné, že tato hodnota pochází z téhož základního souboru jako ostatní hodnoty výběrového souboru. V principu existují dvě možnosti takového zjištění. Předně můžeme někdy již během sledování (experimentu) zjistit, že při získávání některé z hodnot došlo k porušení podmínek, za nichž má sledování probíhat (např. okamžitý výpadek elektrického proudu či jiná nehoda). Takový údaj je ovšem nutné ze souboru vyloučit, a to *bez ohledu na jeho číselnou hodnotu*.

Druhá možnost je, že sice k porušení podmínek došlo, ale nejsme si toho vědomi; pak nás na to může upozornit jedině případná atypičnost hodnoty sledované veličiny. Posoudit, zda se jedná o atypickou (tj. odlehlou, extrémní) hodnotu je však možné pouze tehdy, víme-li, jaký typ rozdělení sledovaná náhodná veličina má; bez této znalosti ztrácí pojem „odlehlost“ smysl.

K objektivnímu posouzení, zda zjištěná zdánlivě odlehlá hodnota patří do souboru, lze použít statistických testů (na základě znalosti rozdělení daného souboru):

- **Grubbsův test** – pro testování souborů odpovídajících normálnímu rozdělení
- **Dixonův test** (Q test) – pro testování souborů s neznámým rozdělením (případně souborů s malým počtem měření)

5.1 Vylučování extrémních hodnot u souboru s normálním rozdělením

Vyloučení extrémních hodnot u souborů dat s Gaussovým normálním rozdělením lze provést orientačně nebo pomocí výpočtu testovacího kritéria a následným porovnáním s tabulkovou kritickou hodnotou (Grubbsův test).

5.1.1 Orientační vyloučení extrémních hodnot

Jestliže odchylka libovolné hodnoty variační řady od aritmetického průměru $\bar{x}$, vypočítaného z hodnot souboru s vyloučením extrémně odlišné hodnoty, převyšuje více než 3x směrodatnou odchylku *s* vypočtenou ze souboru bez extrémní hodnoty, považujeme tuto hodnotu za netypickou a můžeme ji vyloučit z dalšího zpracování.

Postup: Z výběrových dat vypočítáme aritmetický průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku s ze souboru **bez podezřelé hodnoty**. Jestliže odchylka podezřelé hodnoty od $\bar{x}$ (bez ohledu na znaménko) překračuje 3s, pak tuto hodnotu vyloučíme. Jestliže je odchylka podezřelé hodnoty od $\bar{x}$ menší než 3s, pak i tuto hodnotu musíme zahrnout do výběrového souboru a dále pak počítáme nový aritmetický průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku s, již s touto hodnotou. Tyto nové výběrové charakteristiky používáme pro další analýzu daného výběrového souboru.

5.1.2 Grubbsův test extrémních odchylek

Grubbsův test se používá pro objektivní vylučování extrémních hodnot na základě vypočteného testovacího kritéria u souborů dat, které odpovídají Gaussovu normálnímu rozdělení pravděpodobností sledované náhodné veličiny.

Postup:

1) Seřadíme hodnoty výběrového souboru do vzestupné variační řady.

2) Vypočteme aritmetický průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku s ze **všech hodnot souboru.**

3) Vypočítáme testovací kritérium pro první (případně poslední n-tou) hodnotu variační řady:

$$T_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{s} \qquad T_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s}$$

4) Vypočtené testovací kritérium porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou pro příslušné n výběrového souboru a zvolenou α pro Grubbsův test (viz Příloha Tab. č. 5 Kritické hodnoty $T_{n;\,\alpha} - T_{1;\,\alpha}$ pro Grubbsův test):

Pokud $T_{1(n,\alpha)} > T_{krit.}$ ⇒ první (případně poslední) hodnotu variační řady **vyloučíme** ze souboru a musíme vypočítat nový průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku s již bez této extrémní hodnoty.

Pokud $T_{1(n,\alpha)} \leq T_{krit.}$ ⇒ první (poslední) hodnota variační řady **patří do souboru** a vyloučit ji nemůžeme (není extrémně odlehlou hodnotou).

Příklad 5.1:

Při vyšetřování chovu dojnic bylo provedeno na výběru 12 dojnic stanovení glukózy v krevním séru. Zjistěte, zda-li nejmenší popřípadě největší hodnota výběru není od ostatních hodnot odlehlá, tzn. zda-li je i tato hodnota pro chov dojnic charakteristická.

Postup:

1) Hodnoty výběrového souboru seřadíme vzestupně do variační řady (mmol.l^{-1}):

   0,9   2,8   2,9   3,0   3,1   3,1   3,2   3,3   3,7   3,8   4,2   6,8

2) Vypočteme aritmetický průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku s ze všech hodnot souboru:

   $\bar{x} = 3{,}4$ s = 1,338

3) Vypočítáme testovací kritérium pro minimum a maximum:

$$T_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{s} = \frac{2,5}{1,338} = 1,868$$

$$T_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s} = \frac{3,4}{1,338} = 2,541$$

4) Vyhledáme v tabulkách kritických hodnot Grubbsova testu kritickou hodnotu pro zvolené $\alpha = 0,05$ a počet hodnot $n = 12$: $T_{krit.} = 2,387$

5) *Závěr:*

$T_1 \leq T_{krit.}$, tzn. že nejnižší hodnota není odlehlá, tzn. její velikost není ovlivněna hrubou chybou, ale pouze náhodnou chybou způsobující vychýlení hodnoty pouze v rámci ostatních hodnot souboru.

$T_n > T_{krit.}$, tzn. že nejvyšší hodnota je odlehlá (extrémní), tzn. její velikost je ovlivněna hrubou chybou a ne pouze náhodnou chybou. Tuto nejvyšší hodnotu, tzn. 6,8 $mmol.l^{-1}$, je tedy třeba za souboru měření vyloučit.

5.2 Vylučování extrémních hodnot u souboru s neznámým rozdělením

Vyloučení extrémních hodnot u souborů dat s neznámým rozdělením lze provést pomocí výpočtu testovacího kritéria a následným porovnáním s tabulkovou kritickou hodnotou (Dixonův test).

5.2.1. Dixonův test extrémních odchylek

Při výpočtu testovacího kritéria se využívá variační rozpětí souboru ($R = x_{max} - x_{min}$). Výhodou Dixonova testu je použití i u souborů s malým počtem hodnot.

Postup:

1) Vytvoříme variační řadu podle velikosti hodnot: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots x_{n-1}, x_n$

2) Vypočteme testovací kritérium pro 1., případně poslední (n-tou) hodnotu řady:

$$Q_1 = \frac{x_2 - x_1}{R} \qquad\qquad Q_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{R}$$

3) Vypočtené testovací kritérium porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou pro příslušné n výběrového souboru a zvolenou α pro Dixonův test:

Pokud $Q_{1(n)} > Q_{krit.} \Rightarrow$ první (poslední) hodnotu variační řady **vyloučíme**

Pokud $Q_{1(n)} \leq Q_{krit.} \Rightarrow$ první (poslední) hodnotu variační řady nemůžeme vyloučit (hodnota **patří do souboru)**

Příklad 5.2:

Při vyšetřování chovu dojnic bylo provedeno u výběru 10 dojnic stanovení obsahu močoviny v moči. Zjistěte, zda-li nejmenší, popřípadě největší hodnota výběru není od ostatních odlehlá, tzn. zda-li je i tato hodnota pro chov charakteristická.

Postup:

1) Hodnoty výběrového souboru seřadíme do vzestupné variační řady (mmol.l^{-1}):

   123
   127
   136
   149
   152
   153
   156
   178
   198
   535

2) Vypočítáme testovací kritérium:

$$Q_1 = \frac{x_2 - x_1}{R} = \frac{127-123}{535-123} = 0{,}010 \qquad Q_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{R} = \frac{535-198}{535-123} = 0{,}818$$

3) Vyhledáme v tabulkách kritických hodnot Dixonova testu (Příloha: Tabulka č.6 Kritické hodnoty prom Dixonův test) kritickou hodnotu pro zvolené α = 0,05 a počet hodnot n = 10: $Q_{krit.}$= 0,412

4) *Závěr:*

$Q_1 \leq Q_{krit}$, tzn. že nejnižší hodnota není odlehlá tzn. její velikost není ovlivněna hrubou chybou, ale pouze náhodnou chybou způsobující vychýlení hodnoty pouze v rámci ostatních hodnot souboru.

$Q_n > Q_{krit.}$, tzn. že nejvyšší hodnota je odlehlá tzn. její velikost je ovlivněna hrubou chybou, případně cíleným působením určitého vlivu a nikoli pouze náhodnou chybou. Tuto hodnotu je proto třeba při celkovém hodnocení chovu z náhodného výběru vyloučit.

Kapitola 6

Testování statistických hypotéz

Testování statistických hypotéz představuje jednu z nejdůležitějších součástí biostatistiky především z pohledu praktického využití metod statistického usuzování v oblasti vyhodnocování experimentálních dat v biologickém a medicínském výzkumu. Hlavním cílem statistického usuzování je získat závěry o vlastnostech celé populace na základě sledování a provádění experimentů na výběrových souborech z této populace. Statistickou analýzou získaných výběrových dat jsme pak schopni rozhodnout o platnosti určitého obecného tvrzení (statistické hypotézy) na úrovni celé populace.

6.1 Experiment

Pojmem experiment označujeme studii, v níž badatel zkoumá pomocí záměrných změn působících podmínek, jaké změny byly vyvolány u jedné nebo více skupin jedinců nebo jiných pokusných jednotek. Změnou působících podmínek rozumíme např. provedení určitého **pokusného zásahu (intervence)** nebo ošetření. Tzv. přirozené experimenty využívají nezáměrných změn působících podmínek. Jestliže sledujeme rozdílnost mezi dvěma nebo více skupinami, mluvíme o komparativním experimentu. Pro popis změn podmínek, které badatel v experimentu studuje, využíváme pojem nezávisle proměnných. Badatel sleduje, jak různé hodnoty nezávisle proměnných, jejichž hodnoty záměrně volí, ovlivňují cílovou sledovanou proměnnou (závisle proměnnou). Cílem experimentálního sledování je specifikace vztahu mezi závisle proměnnou a nezávisle proměnnou (případně nezávisle proměnnými). Nezávisle proměnné jsou někdy nazývány faktory a jejich hodnoty úrovněmi faktorů. Pokusný zásah nebo ošetření představuje kombinaci specifických hodnot faktorů. Statistickými metodami pak posuzujeme, zda odchylky mezi skupinami vznikly v důsledku náhody, nebo vlivem aplikovaného pokusného zásahu.

Experiment je prováděn na sledovaných jednotkách (živých jedincích), které experimentátor řadí do různých skupin (výběrových souborů) podle použité pokusné intervence. V nejjednodušším experimentu výzkumník vybere jednu skupinu a aplikuje na jedincích z této skupiny daný typ pokusného zásahu nebo ošetření (např. určitý typ diety nebo terapie), přičemž hodnotu závisle proměnné měří buď jenom po experimentu, nebo i před ním. Nejčastějším typem experimentu je však tzv. **komparativní experiment**, kdy badatel pracuje minimálně se dvěma skupinami – tzv. kontrolní a pokusnou skupinou. **Kontrolní skupina** obvykle sestává z jedinců, kteří nejsou vystaveni pokusné intervenci, jejíž účinky jsou studovány. Skupina vystavená zkoumanému typu pokusného zásahu se nazývá **experimentální (pokusná) skupina**. Ostatní podmínky jsou pokud možno u obou skupin udržovány stejné, takže vzniklé rozdílnosti lze přičíst pouze na vrub zkoumaného pokusného zásahu. V některých případech (především v humánní medicíně) je kontrolní skupina ošetřena **placebem** – tedy ošetřením, jež je z biologického hlediska zcela neúčinné. Experimentátor totiž musí počítat s tzv. efektem placeba, jenž způsobuje, že jedinci reagují na jakékoliv ošetření – i v případě, že se použije placebo. Psychologické působení vědomí, že bylo provedeno ošetření, může způsobit fyziologické nebo psychické změny. Proto je vhodné ošetřit kontrolní skupinu placebovou náhražkou, aby bylo možno odhadnout velikost placebového efektu v dané situaci a provést pravdivější srovnání obou skupin.

Mnoho experimentálních studií je možno provést cestou tzv. **párového pokusu**, kdy provádíme měření identických jedinců jednou před pokusem a podruhé po pokusu. Příklad takového přístupu představuje např. vstupní test a závěrečný test na stejných studentech ve škole, meření krevního tlaku stejných jedinců před medikací a pod jejím vlivem nebo měření tělesné hmotnosti před fyzickou zátěží a po ní. Někdy musíme znát kontext výzkumu, abychom rozlišili takto spárovaná data („závislé výběry“) od dat získaných měřením dvou nezávislých stejně velkých skupin („nezávislé výběry“).

Experimenty je možno provádět i s několika ošetřenými skupinami. V některých případech srovnávacích experimentů nemáme kontrolní skupinu bez intervence, ale všechny skupiny jsou ošetřeny nějakým způsobem a pak tyto skupiny porovnáváme mezi sebou. V složitějších experimentech je možno záměrně měnit více ovlivňujících nezávisle proměnných.

Při provádění experimentu je důležité navrhnout plán experimentu tak, aby jednotlivé ovlivňující proměnné nepůsobily vzájemně rušivě. Můžeme říci, že dvě proměnné jsou v rušivém vztahu, pokud nemůžeme oddělit jejich účinek na sledovanou závisle proměnnou. Potencionální rušivou proměnnou v experimentu může být i tzv. *skrytá proměnná*, kterou neznáme a v rámci probíhající studie ji tedy nesledujeme. Tato neznámá skrytá proměnná může ovlivňovat sledovanou závisle proměnnou. V každém experimentu se samozřejmě skryté proměnné vyskytují – některé mají rušivý charakter, jiné nikoliv.

Například, když provádíme testování účinnosti nového léku proti vysokému krevnímu tlaku, považujeme za nezávisle proměnnou dávku aplikovaného léku a závisle proměnnou naměřenou hodnotu systolického tlaku. Protože je krevní tlak veličinou značně ovlivněnou věkem, může věk (pokud ho v experimentu nebereme v úvahu) působit jako skrytá rušivá proměnná. Jestliže jsou ovšem jedinci do kontrolní i experimentální skupiny vybíráni náhodným výběrem bez ohledu na věk, můžeme říci, že náhodné přiřazení jedinců do skupin kontrolovalo působení vlivu věku jako rušivé proměnné. V tomto případě pak můžeme přisoudit případné vzniklé rozdílnosti krevního tlaku mezi skupinami účinku sledovaného nového léku a na základě statistického testu pak můžeme prohlásit účinek nového léku za prokázaný.

Při provádění experimentů je dále nutné mít na paměti tzv. **homogenitu pozorování,** čímž rozumíme okolnost, že měřené znaky se na zkoumaných jedincích musí zachycovat jednotným způsobem u všech pozorovaných skupin. Proto se určují přesné postupy měření, laboratorní postupy a vylučují se subjektivní vlivy na pozorování jak u hodnotitele (experimentátora), tak u hodnoceného. Vyloučení subjektivního vlivu na pozorování (především při výzkumech v humánní medicíně) se dosahuje slepými pokusy neboli maskováním či zaslepením. Při jednoduchém slepém pokusu se měřený jedinec nedozví, jaká forma ošetření je u něho provedena. **Jednoduchý slepý pokus** bývá vhodný tehdy, když data pocházejí ze subjektivních pozorování jedinců (bolest, celkový pocit apod.). Jestliže existuje možnost, že i badatel (hodnotitel) podléhá subjektivním vlivům, např. rád by upřednostnil některé ošetření, pak tento dojem může přenést i na hodnoceného a tím ovlivnit jeho posuzování výsledků. Tomuto kombinovanému jevu se **předchází dvojitým slepým pokusem**, kdy badatel, který získává data, ani testovaný jedinec neví, u koho byl použit hodnocený pokusný zásah. Je zřejmé, že slepé pokusy nejsou vždy praktické a pro mnohé otázky ani nutné (především ve veterinární medicíně).

V neposlední řadě je nutné při provádění experimentů mít vždy na zřeteli i tzv. **homogenitu okolností intervence** (pokusného zásahu). Tímto termínem rozumíme požadavek, že srovnávané skupiny se od sebe nesmí lišit podmínkami průběhu pokusné intervence až na znak, který určuje důvod pro konání daného experimentu.

6. 2 Teorie testování statistických hypotéz

Testování statistických hypotéz patří spolu s metodami teorie odhadu k nejdůležitějším postupům statistického usuzování (statistické indukce). V případě, kdy známe typ rozdělení sledované náhodné veličiny v základním souboru, je základní úlohou statistické indukce činit na základě výběrových dat úsudky o neznámých parametrech rozdělení, případně úsudky o nějaké funkci těchto parametrů. Často existují o základním souboru určité předpoklady, které chceme na základě výběrových dat ověřit. Tyto předpoklady, které se mohou týkat neznámých parametrů, daných funkcí parametrů, ale také tvaru rozdělení a dalších vlastností základního souboru, můžeme formulovat jako **statistické hypotézy**.

Úlohou statistické indukce pak je rozhodnout na základě informací získaných z náhodných výběrů, zda určitou hypotézu přijmeme nebo zamítneme. Postupy, které vedou k tomuto rozhodnutí, nazýváme testování hypotéz. Hypotézy mohou být různé, týkají se buď **rozdělení** pravděpodobností sledovaného znaku v základním souboru, nebo některého z **parametrů** (popisné charakteristiky) tohoto rozdělení. Statistickou hypotézou může být např. tvrzení:

- daný náhodný výběr pochází z **normálního rozdělení**
- 2 náhodné výběry pocházejí ze **stejného rozdělení**
- 2 náhodné výběry jsou z rozdělení, která mají stejnou **střední hodnotu**, **rozptyl**, apod.

Rozhodovací pravidlo, kterým přiřadíme rozhodnutí o platnosti či neplatnosti hypotézy, se nazývá **statistický test**. Pokud se statistické hypotézy týkají neznámých parametrů (daných funkcí parametrů) a při provádění testů hypotéz vycházíme ze známého rozdělení sledované náhodné veličiny v základním souboru (nejčastěji Gaussovo normální rozdělení), hovoříme obvykle o **parametrických testech**. Hypotézy se pak obvykle týkají parametrů normálního rozdělení střední hodnota μ a rozptyl σ^2) a výpočty se opírají o odhady těchto parametrů z výběrových souborů (aritmetický průměr $\bar{x}$ a výběrový rozptyl s^2).

Jestliže se statistické hypotézy týkají obecných vlastností základního souboru a příslušný test nevyžaduje znalost typu rozdělení v základním souboru, hovoříme o **neparametrických testech**. V tomto případě tedy pracujeme s výběry, které pocházejí z „neznámého“ rozdělení a testovanou statistickou hypotézou obvykle bývá shoda rozdělení dvou souborů. Výpočty se opírají o pořadová čísla naměřených hodnot sledované veličiny u výběrových souborů..

Proceduru testování statistické hypotézy (výzkumné otázky v rámci experimentu) lze schematicky rozložit do následujících kroků:

1. Formulace výzkumné otázky ve formě nulové a alternativní statistické hypotézy
2. Zvolení hladiny významnosti (přijatelné úrovně chyby testování)
3. Výpočet testovacího kritéria (testovací statistiky)
4. Závěr (rozhodnutí o platnosti statistické hypotézy)

Krok 1: Formulace statistické hypotézy

První krok při statistickém testování spočívá ve formulování výzkumné otázky v podobě nulové, resp. alternativní hypotézy, které klademe při testování proti sobě:

1) nulová hypotéza (označená H_0) – tvrzení, které obvykle vyjadřuje „žádný neboli nulový rozdíl“ mezi testovanými soubory dat (jinými slovy lze říci, že jakýkoli nalezený rozdíl mezi soubory lze přičíst přirozené variabilitě dat). Nulovou hypotézou mohou být určitá tvrzení o parametrech základního souboru, např., že daný parametr je roven určité hodnotě: μ = konst., že dva parametry se rovnají: $\mu_1 = \mu_2$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, apod. Obvykle jsou to hypotézy, které by badatel při vyhodnocování experimentu rád spíše zamítl.

2) alternativní hypotéza (označená H_1) - popírá platnost nulové hypotézy H_0. Obvykle se vyjadřuje jako „existence diference“ mezi soubory nebo „existence závislosti“ mezi proměnnými. Nejčastěji jde o logický opak nulové hypotézy, tzn. např.: $\mu \neq$ konst., $\mu_1 \neq \mu_2$ nebo $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Někdy však můžeme mít důvod pracovat i s tzv. jednostrannou alternativní hypotézou. Jestliže nulová hypotéza říká, že neexistuje rozdíl mezi středními hodnotami pro dvě populace, pak **jednostranná** alternativní hypotéza může např. tvrdit, že druhá populace má střední hodnotu vyšší (nebo naopak nižší). Naproti tomu tzv. **oboustranná** alternativní hypotéza, tvrdí, že existuje *jakýkoliv* rozdíl, tzn. rozdíl směrem k větším i menším hodnotám.

Pokud při statistickém testování nedokážeme opak, předpokládáme, že platí nulová hypotéza.

Např.: Máme v experimentu 2 skupiny zvířat, jednu pokusnou (*P*) a druhou kontrolní (*K*). U pokusné skupiny sledujeme např. působení léku na onemocnění, jímž jsou postiženy stejně obě skupiny. Kdybychom lék nepoužili, měly by výsledky měření v obou skupinách být zhruba stejné (v průměru). V tomto případě bychom tvrdili, že obě skupiny zvířat patří do téhož základního souboru, a že rozdíl mezi nimi je nulový (platí tedy nulová hypotéza o shodě středních hodnot obou souborů - H_0: $\mu_1 = \mu_2$). Hypotézu vždy vyslovujeme obecně o celých populacích, proto používáme symboly teoretických parametrů - středních hodnot $\mu_{1,}\ \mu_2$.

Dostaneme-li v experimentu u ošetřené skupiny *P* (při aplikaci léku) výsledky výrazně odlišné (v průměru) oproti skupině kontrolní (*K* - neošetřeno), pak nulovou hypotézu zamítáme a přijmeme alternativní hypotézu - že skupina *P* patří do jiného základního souboru než skupina *K*, tzn., že účinek zkoumaného léku je prokazatelný (ovlivnil pokusnou skupinu a změnil její průměr ve srovnání s kontrolní skupinou).

V případě, že výsledky se prakticky nebudou lišit (budou se vyskytovat jen náhodné rozdíly, způsobené variabilitou biologického materiálu), přijmeme H_0, tzn. prohlásíme lék za neúčinný.

Krok 2: Zvolení hladiny významnosti (chyby α)

Druhý krok při testování statistických hypotéz spočívá v určení **hladiny významnosti testu (chyba α)**, což je pravděpodobnost, že se zamítne nulová hypotéza, ačkoliv ona platí. Tato hladina významnosti α odpovídá míře ochoty experimentátora smířit se s výskytem této chyby při testování a volí se pochopitelně dostatečně malá.

Je třeba si uvědomit, že testovanou hypotézu vždy přijímáme nebo zamítáme na základě výsledků **náhodného výběru**, a proto může být zamítnutí i nezamítnutí hypotézy H_0 správné, ale i nesprávné. Obecně se můžeme dopustit jedné ze 2 chyb:

- **chyba 1. druhu α** - zamítneme hypotézu H_0, když platí

- **chyba 2. druhu ß** - nesprávně přijmeme hypotézu H_0, když neplatí

Naší snahou je samozřejmě volit test tak, aby pravděpodobnost chyb 1. a 2. druhu byla co nejmenší. Univerzální test minimalizující obě chyby však neexistuje, protože chyby spolu souvisí (čím větší je α, tím menší je β a naopak). Musíme tedy volit kompromis: zpravidla se postupuje tak, že si **předem zvolíme chybu α** (hladina významnosti testu) a to dostatečně nízkou – pro biologická data se používá 0,05 (příp.0,01) a tím dostaneme 95% (99%) jistotu správného rozhodnutí. Chybu β nemáme možnost ovlivnit, je dána velikostí zvolené chyby α. Částečně lze ale redukovat velikost obou chyb současně, a to zvětšením rozsahu *n* výběrových souborů použitých pro testování hypotézy.

Pravděpodobnost **1-ß** je definována také jako „**síla testu**“ nebo "rozlišovací schopnost" testu. Představuje pravděpodobnost, že správně zamítneme nulovou hypotézu H_0, když neplatí. Síla testu závisí na předem zvolené **hladině významnosti** testu (chyba α) a to tak, že s klesající hladinou významnosti síla testu **klesá.**

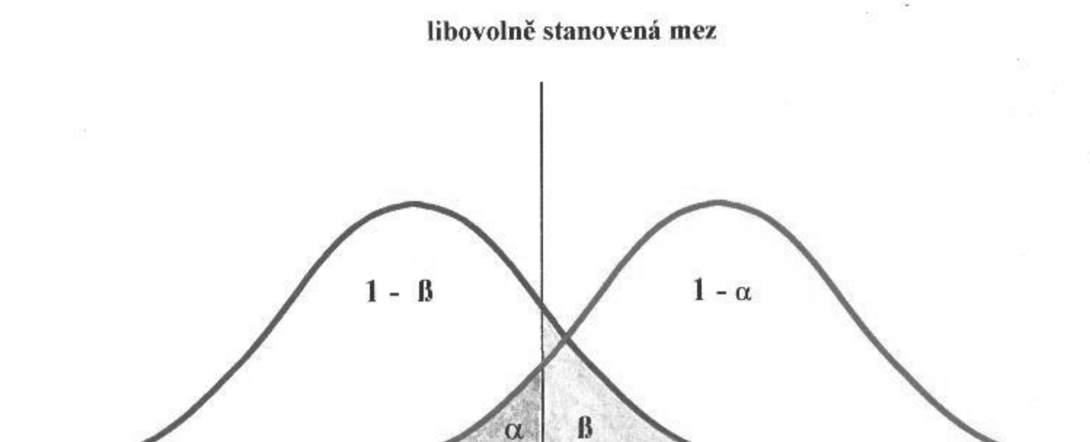
Chybu 1. druhu α a chybu 2. druhu ß při testování statistických hypotéz přehledně sumarizuje tabulka č. 6.1.

Tab. č. 6.1 Chyby α a ß **při testování hypotéz**

ROZHODNUTÍ / SKUTEČNOST	**ZAMÍTÁME H_0**	**NEZAMÍTÁME H_0**
H_0 PLATÍ	Chyba I.druhu α	**SPRÁVNĚ 1- α**
H_0 NEPLATÍ	**SPRÁVNĚ 1- β (síla testu)**	Chyba II.druhu β

Jak již bylo řečeno výše, při testování statistických hypotéz postupujeme prakticky tak, že předem zvolíme dostatečně nízkou pravděpodobnost chyby 1. druhu α (hladinu významnosti) a tím zároveň určíme i velikost chyby 2. druhu β, protože obě chyby spolu navzájem souvisí. Vzájemný vztah mezi chybou 1. druhu α a chybou 2. druhu β v závislosti na předem zvolené hladině významnosti znázorňuje obr. 6.1.

Obr. 6. 1 Vztah mezi chybou 1. druhu α a chybou 2. druhu β



Krok 3: Výpočet testovacího kritéria

Rozhodnutí o platnosti (neplatnosti) nulové hypotézy provádíme na základě výpočtu **testovacího kritéra** (testovací statistiky), která slouží jako základ pro provedení úvah o výsledném závěru testu („doporučení“). Existuje mnoho testovacích statistik, výpočet závisí na povaze dat a testované hypotéze. U parametrických testů používáme k výpočtu testovacího kritéria odhady parametrů μ a σ z výběrových souborů ($\bar{x}$, s), u neparametrických testů pořadová čísla naměřených hodnot výběrových souborů. Testovací kritéria se řídí různými typy rozdělení (podle toho, jakou hypotézu testujeme). Jako testovací kritérium mohou sloužit např. veličiny:

t (Studentův t-test pro testování rozdílu 2 středních hodnot)

F (F-test pro testování rozdílu 2 rozptylů)

χ^2 (χ^2- test pro testování rozdílu četností souborů)

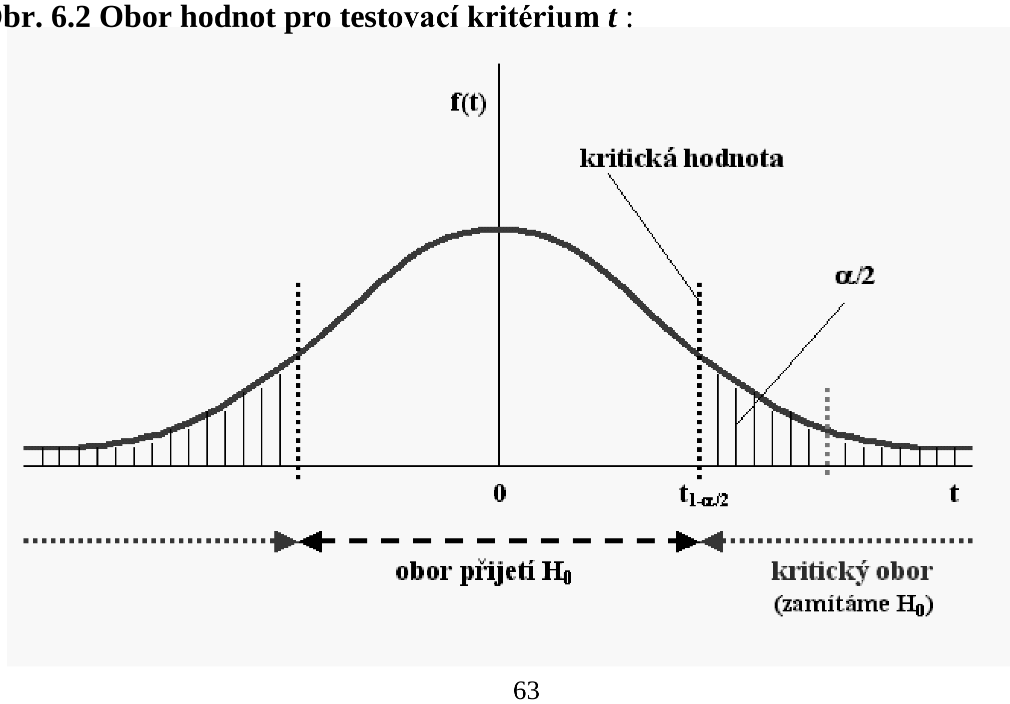
Obor hodnot testovacího kritéria rozdělujeme při testování hypotéz na 2 části:

1) ***kritický obor*** - takový obor hodnot, který svědčí ve prospěch alternativní hypotézy H_1. Vypočteme-li tedy z výběrových dat hodnotu testovacího kritéria, která padne do tohoto oboru, přijmeme hypotézu H_1 (zamítáme H_0).
2) ***obor přijetí*** - padne-li vypočtená hodnota testovacího kritéria do tohoto oboru, pak testovanou nulovou hypotézu H_0 nezamítneme.

Vymezení kritického oboru a oboru přijetí se provádí pomocí **kritických hodnot** testovacího kritéria. Jako kritické hodnoty testovacího kritéria slouží specifické kvantily příslušných rozdělení (např. t-rozdělení, F-rozdělení, χ^2-rozdělení) související se zvolenou hladinou významnosti α pro daný test. Obvykle se používají kvantily 1-α/2 (případně 1-α) příslušného rozdělení (nejčastěji tedy 97,5% a 99,5% kvantil - podle zvolené pravděpodobnosti chyby: 5% nebo 1%). Tyto kvantily (kritické hodnoty) pro různá rozdělení používaná jako testovací statistiky, jsou tabelovány ve statistických tabulkách a jejich hodnota závisí na zvolené chybě α a počtu stupňů volnosti $\nu = n\text{-}1$ (v případě neparametrických testů pouze na rozsahu n) výběrových souborů použitých při testování.

Příklad vymezení kritického oboru a oboru přijetí nulové hypotézy pomocí kritických hodnot u testovacího kritéria pro t-rozdělení (Studentův t-test pro testování rozdílu 2 středních hodnot) je znázorněn na obrázku 6.2.

Obr. 6.2 Obor hodnot pro testovací kritérium *t* :



t - testovací kritérium

f(t) – hustota pravděpodobnosti testovacího kritétia

α - zvolená hladina významnosti (chyba 1. druhu)

$t_{1-\alpha/2}$ – kvantil 1-α/2 *t*-rozdělení (kritická hodnota při testování)

Krok 4: Závěr testování

Poslední krok při testování statistických hypotéz představuje formulace závěru testování („doporučení“). Lze to provést dvěma způsoby: srovnáme vypočtenou testovací statistiku s kritickou hodnotou nebo ji převedeme do pravděpodobnostní škály na tzv. hodnotu pravděpodobnosti *p*.

První způsob posouzení je velmi názorný. Provedení spočívá v přímém **srovnání vypočtené testovací statistiky (testovacího kritéria) s kritickou hodnotou**, která se určuje v závislosti na zvolené hladině významnosti α. Jestliže se hodnota vypočtené testovací statistiky ocitne v kritickém oboru („překročí kritickou hodnotu“), znamená to, že existuje evidence pro zamítnutí nulové hypotézy (tzn. „že jsme potvrdili rozdíl“). Naopak, pokud se vypočtená testovací statistika ocitne uvnitř oboru přijetí H_0, nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu a tedy předpokládáme, že platí. V souvislosti s tímto způsobem uvažování je nutné podotknout, že nezamítnutí (přijetí) nulové hypotézy ještě neznamená její důkaz. Spíše to znamená, že nemáme dosti evidence k jejímu zamítnutí.

Při *druhém způsobu* formulace závěru testování převádíme testovací statistiku do pravděpodobnostní škály a **počítáme pravděpodobnost *p***, která odpovídá na otázku: „Jestliže nulová hypotéza platí, jaká je pravděpodobnost, že získáme právě vypočítanou hodnotu nebo ještě neobvyklejší hodnotu testovací statistiky?“ Hodnota *p* tedy kvantifikuje pravděpodobnost realizace hodnoty testovací statistiky, pokud nulová hypotéza platí. Takže pravidlo pro formulaci závěru je pak následující:

Jestliže *p*-hodnota je menší než hladina významnosti α (chyba α), zamítáme nulovou hypotézu H_0. Symbolicky lze použít závěr: **$p < 0{,}05$ „statisticky významný rozdíl“** nebo

$p < 0{,}01$ „statisticky vysoce významný rozdíl“

Jestliže je *p*-hodnota větší než hladina významnosti α (chyba α), nulovou hypotézu H_0 nemůžeme zamítnout a tedy předpokládáme, že platí. Symbolicky lze psát:

$p > 0{,}05$ („statisticky nevýznamný rozdíl“).

6. 3 Klasifikace testů podle typů statistických dat

Při statistické analýze sledovaných náhodných veličin (statistických znaků) pomocí statistických testů je vždy důležité vybrat vhodnou a odpovídající metodu testování pro příslušný typ statistických dat. V první kapitole jsme se seznámili se třemi základními typy statistických znaků: znaky nominální (kategoriální data), ordinální (pořadová data) a kardinální (metrická data). Nominální a ordinální statistické znaky představují již ze své podstaty data diskrétní (nespojitá), kdežto kardinální znaky mohou být představovány daty spojitými i diskrétními. Každý z těchto typů statistických znaků přitom vyžaduje pro své hodnocení a statistické testování specifické metody a postupy odpovídající povaze těchto dat.

a) Testování kategoriálních dat

V případě porovnávání dvou náhodných veličin, které jsou představovány kategoriálními daty (nominálními znaky), používáme hodnocení rozdílu četností těchto znaků v souborech, a to četnosti empirické a teoretické. Četnosti jsou uspořádány do tabulky, kde jedna ze sledovaných náhodných veličin představuje řádky a druhá sloupce dané tabulky. Dále testujeme tvrzení, že četnosti jedné veličiny určitým způsobem podmiňují četnosti druhé veličiny, tzn. že obě sledované veličiny jsou na sobě závislé. Analýzu těchto závislostí nominálních dat, stejně jako analýzu rozdílů mezi četnostmi nominálních znaků provádíme pomocí **chí-kvadrát testů** (viz kap. 10: χ^2-test, kontingenční tabulky).

b) Testování pořadových dat

Při porovnávání dvou souborů pořadových dat vytváříme „směsný výběr" – variační řadu uspořádaných hodnot z obou souborů, v němž přidělíme jednotlivým hodnotám pořadová čísla. Následně vypočítáme součty pořadových čísel zvlášť pro hodnoty pocházejícím z jednoho i z druhého souboru. Pokud se porovnávané soubory dat výrazně neliší, oba součty pořadí dávají přibližně stejnou hodnotu. Naopak, při výrazné odlišnosti obou souborů dat, součet pořadí pro hodnoty jednoho souboru bude velmi odlišný od součtu pořadí pro hodnoty druhého souboru. Testování pořadových dat je reprezentováno **neparametrickými testy**, které jsou používány pro testování hypotéz u ordinálních znaků, u kardinálních znaků diskrétní povahy a u kardinálních spojitých znaků v souborech, které neodpovídají normálnímu rozdělení pravděpodobností, tzn. mají *neznámé rozdělení* (viz kap. 8 Neparametrické testy). Hypotézy testované neparametrickými testy se týkají pouze obecných vlastností rozdělení, např. shody dvou křivek rozdělení, přičemž nepředpokládají normalitu dat.

c) Testování spojitých dat s normálním rozdělením

V případě porovnávání dvou souborů spojitých náhodných veličin, které odpovídají normálnímu rozdělení pravděpodobností, používáme **parametrické testy,** které testují hypotézy týkající se parametrů normálního rozdělení, tzn. střední hodnoty μ a rozptylu σ^2. Výpočty se opírají o odhady těchto parametrů z výběrových souborů. Nejčastěji nás zajímá hypotéza o shodě dvou středních hodnot, kterou je možno testovat pomocí Studentova *t*-testu, v němž na základě výběrových průměrů a rozptylů počítáme testovací kritérium t (testovací statistika s *t*-rozdělením). Při porovnání s tabulkovou kritickou hodnotou $t_{krit.}$ pak rozhodneme o statistické významnosti rozdílu obou srovnávaných středních hodnot (viz kap. 7 Parametrické testy).

6. 4 Testování normality

Jak jsme již poznali v předchozím výkladu, použití většiny metod a postupů v indukční statistice je specifické pro různé typy statistických dat. Postupy statistického hodnocení se liší především podle toho, jaké znalosti máme o typu rozdělení sledované náhodné veličiny v základním souboru. Proto je nutné provést jako jeden z prvních kroků při statistickém testování tzv. test normality, tj. zjištění, zda soubor dat sledované náhodné veličiny odpovídá Gaussovu normálnímu rozdělení pravděpodobností, či nikoli (v tomto případě pak pracujeme s neznámým rozdělením).

Přesto, že většina běžně používaných statistických metod vychází z předpokladu normality dat, není test normality zdaleka běžnou statistickou metodou, jak by se dalo očekávat. Důvody k tomu jsou zřejmě dva. První spočívá v relativní pracnosti tohoto procesu, jehož výpočet bez počítače, případně programovatelné kalkulačky, je časově velmi náročný a druhý spočívá ve skutečnosti, že při dostatečně velkých souborech (n > 30) je většina testů na podmínku normality poměrně málo citlivá. Protože však některé testy splnění podmínky normality striktně vyžadují, uvedeme si alespoň jeden z použitelných testů normality - χ^2 test dobré shody, který je vedle testu šikmosti a špičatosti normálního rozdělení jedním z nejpoužívanějších testů normality dat.

6. 4. 1 Chí-kvadrát test dobré shody

Test dobré shody používáme obecně k testování shody četností (především u nominálních znaků - kategoriálních dat), ale můžeme ho použít i k otestování shody rozdělení četností u znaků kvantitativních, a to metodou porovnání distribuční funkce sledované spojité náhodné veličiny s distribuční funkcí normovaného normálního rozdělení.

χ^2 **test dobré shody** je založen na posouzení rozdílu mezi **skutečnými (empirickými)** četnostmi výskytu hodnot ve výběrovém souboru a **očekávanými (teoretickými)** četnostmi, odpovídajícími příslušnému předpokládanému rozdělení pravděpodobností (Gaussovu normálnímu rozdělení). χ^2 test rozhoduje, zda je rozdíl mezi empirickými a teoretickými četnostmi způsoben pouze náhodně a výběrový soubor pochází z populace s normálním rozdělením, nebo je rozdíl natolik velký, že je způsoben tím, že výběrový soubor nepochází z populace odpovídající Gaussovu normálnímu rozdělení, ale z nějakého jiného neznámého rozdělení.

Za předpokladu platnosti nulové hypotézy, že testovaná náhodná veličina má normální rozdělení („nulový rozdíl od tohoto rozdělení“), má testovací statistika:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_{ei} - n_{oi}\right)^2}{n_{oi}}$$

Pearsonovo rozdělení o ν stupních volnosti, kde n_{ei} představuje pozorované četnosti v jednotlivých třídách výběrového souboru a n_{oi} teoretické četnosti odvozené výpočtem pomocí tabulek distribučních funkcí normovaného normálního rozdělení. Počet stupňů volnosti $\nu = m-k-1$, kde m je počet tříd výběrového souboru a k je počet počet parametrů normálního rozdělení, které neznáme, a musíme je odhadnout z výběrového souboru.

Jednotlivé kroky celého testování nejlépe objasní následující schéma postupu:

Např.: při sledování hmotnosti králíků máme rozhodnout, zda náhodný výběr o 1000 kusech odpovídá Gaussovu normálnímu rozdělení s těmito parametry: μ = 3,75 kg , σ = 0,5 kg (kterým se řídí základní soubor).

Při testu vycházíme z těchto údajů:

Výběrový soubor: $x_1, x_2, x_3, \ldots\, x_{1000}$ (n = 1000)

Základní soubor: μ = 3,75, σ =0,5

1) Zvolíme intervaly tříd sledované veličiny (d_i - dolní mez, h_i - horní mez) , např. po 0,5 kg
   ($_i$ - číslo třídy)

2) Zjistí se absolutní **četnost empirická – n_{ei}** v jednotlivých třídách výběrového souboru.

3) Vypočítá se absolutní **četnost teoretická** (očekávaná pro normální rozdělení) - n_{oi} v jednotlivých třídách následujícím postupem:

a) pro hodnoty d_i a h_i vypočítáme relativní hodnoty normované veličiny u_{di} a u_{hi} :

$$u_{di} = \frac{d_i - \mu}{\sigma} \qquad u_{hi} = \frac{h_i - \mu}{\sigma}$$

b) pro u_{di} a u_{hi} se zjistí v tabulkách hodnoty **distribuční funkce** : $F(u_{di})$, $F(u_{hi})$

(viz Příloha: Tab. č. 2 Distribuční funkce *F(u)* normovaného normálního rozdělení)

c) pro každou třídu se zjistí **teoretická pravděpodobnost** jako rozdíl distribuční funkce pro horní a dolní mez dané třídy:

$$p_{oi} = F(u_{hi}) - F(u_{di})$$

d) pro každou třídu se vypočítá **očekávaná** absolutní **četnost** (přepočtem na velikost sledovaného výběrového souboru):

$$n_{oi} = n \cdot p_{oi}$$

4) Vypočítá se **testovací kritérium (statistika)** χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_{ei} - n_{oi})^2}{n_{oi}}$$ *m* – počet tříd

5) Vypočítaný χ^2 porovnáme s tabulkovou hodnotou $\chi^2_{(1-\alpha,\nu)}$ - kritická hodnota při zvolené hladině významnosti α (např.: 0,05) a $\nu = m-k-1$ stupních volnosti (viz Příloha: Tab. č. 4a Kritické hodnoty rozdělení χ^2).

6) Je-li $\chi^2 \leq \chi^2_{(1-\alpha,\nu)}$ můžeme vyslovit závěr, že rozdíl mezi empirickou a teoretickou četností je statisticky **nevýznamný**, tzn. že byl způsoben pouze náhodnými činiteli a výběrový soubor pochází z populace s normálním rozdělením (byla potvrzena shoda s teoretickým předpokladem a sledovanou veličinu můžeme považovat za veličinu s normálním rozdělemím).

Je-li $\chi^2 > \chi^2_{(1-\alpha,\nu)}$ znamená to, že jsme prokázali statisticky **významný** rozdíl mezi empirickou a teoreticky očekávanou četností pro normální rozdělení, tj. tento rozdíl není způsoben jen náhodnými činiteli, ale byl způsoben tím, že výběrový soubor pochází z jiného rozdělení než normálního (nebyla potvrzena shoda s teoretickým předpokladem a sledovanou veličinu nemůžeme považovat za veličinu s normálním rozdělením).

V případě, že χ^2 testem dobré shody prokážeme, že sledovanou veličinu můžeme považovat za veličinu s normálním rozdělemím, pro charakteristiku a další testování této veličiny můžeme použít použít parametrické metody. V opačném případě, kdy test dobré shody ukáže, že sledovanou veličinu nemůžeme považovat za veličinu s normálním rozdělemím, pak pro charakteristiku a další testování této veličiny je nutno použít neznámé rozdělení a neparametrické metody.

Jak již bylo uvedeno dříve, výpočetní postup při provádění chí-kvadrát testu dobré shody je časově poměrně náročný a detailní seznámení s tímto postupem bude prakticky demonstrováno na cvičeních.

Kapitola 7

Parametrické testy

Zřejmě nejčastější úlohou při analýze experimentálních dat v oblasti biostatistiky je testování rozdílů mezi dvěma výběrovými soubory za účelem zjištění, zda existuje rozdíl mezi populacemi, z kterých výběry pocházejí. Nejčastěji testujeme hypotézy o parametrech μ a σ Gaussova normálního rozdělení pomocí parametrických testů.

Protože je za nejdůležitější parametr populace s normálním rozdělením považována střední hodnota, je základní otázkou kladenou obvykle při parametrickém testování experimentálních dat otázka, zda-li se dva výběry shodují ve svém průměru (tj. zda pocházejí z populace s toutéž střední hodnotou) nebo zda-li sledovaný výběr má určitou konkrétní hodnotu průměru (tj. zda pochází z populace s touto konkrétní střední hodnotou). Další otázkou kladenou při parametrickém testování mohou být dále hypotézy týkající se rozdílu rozptylů mezi dvěma populacemi při hodnocení vlivu pokusných zásahů na variabilitu sledované veličiny.

Předpokladem použití parametrických testů je splnění normality dat sledovaných veličin. Mezi parametrické testy se řadí především Studentův *t*-test pro testování rozdílu dvou středních hodnot a *F*-test pro testování rozdílu dvou rozptylů.

7. 1 Testování rozdílu 2 rozptylů: *F*-test

Testem rozhodujeme, zda pokusný zásah má vliv na **proměnlivost** (rozptyl σ^2) zkoumané náhodné veličiny v populaci. Je důležitý i pro porovnání přesnosti dvou metod měření (např. v laboratořích). Nulovou hypotézu kladenou v *F*-testu můžeme symbolicky vyjádřit následujícím zápisem:

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Při testu vycházíme z dat dvou výběrových souborů, které jsou předmětem srovnávání (typicky pokusný a kontrolní soubor). O každém z těchto souborů předpokládáme, že pochází z populace s určitými parametry μ a σ^2:

Výběr 1: (n_1 prvků) vybrán ze základního souboru s parametry μ_1 a σ_1^2

Výběr 2: (n_2 prvků) vybrán ze základního souboru s parametry μ_2 a σ_2^2

Postup:

1) Vypočteme výběrové rozptyly s_1^2 a s_2^2:

$$s_1^2 = \frac{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n_1}}{n_1 - 1} \qquad s_2^2 = \frac{\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n_2}}{n_2 - 1}$$

2) Stanovíme počet stupňů volnosti obou výběrů:

$v_1 = n_1 - 1$ (pro s_1^2)

$v_2 = n_2 - 1$ (pro s_2^2)

3) Vypočteme testovací kritérium (statistiku) F:

$$F = \frac{\text{větší z rozptylů } (s_1^2, s_2^2)}{\text{menší z rozptylů } (s_1^2, s_2^2)}$$

4) Nechť v_V je počet stupňů volnosti většího z rozptylů a v_M je počet stupňů volnosti menšího z rozptylů.

5) Zvolíme hladinu významnosti α.

Ve statistických tabulkách (viz Příloha: Tab. č. 7 Kvantily $F_{0,975}$ (ν_V, ν_M) Fisher-Snedecorova rozdělení) vyhledáme kritickou hodnotu $F_{krit.} = 1 - \alpha/2$ kvantil F-rozdělení o (v_V,v_M) stupních volnosti a porovnáme s vypočtenou statistikou F.

Je-li $F > F_{krit.}$ => zamítáme nulovou hypotézu H_0 ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$). Jinými slovy to tedy znamená, že rozptyly obou souborů se statisticky významně liší (tj. výběry pocházejí ze dvou různých základních souborů s rozdílnými rozptyly σ_1^2 a σ_2^2). Symbolicky lze tento závěr psát: $p < 0,05$ (příp. $p < 0,01$ podle zvolené hladiny významnosti α).

Je-li $F < F_{krit.}$ => nemůžeme zamítnout hypotézu H_0. Znamená to tedy, že rozptyly obou souborů se statisticky významně neliší (tj. výběry pochází ze stejného základního souboru se společným rozptylem σ^2). Symbolicky lze závěr psát: $p > 0,05$.

Příklad 7.1:

Byl zjišťován vliv nového veterinárního přípravku na hladinu AST v krevním séru dojnic. U výběrového souboru 10 jedinců byl přípravek aplikován a poté byly změřeny hladiny AST v krevním séru těchto dojnic. Jako kontrolní soubor byly použity hodnoty AST v krevním séru u 10 jedinců, kterým přípravek aplikován nebyl. Má přípravek vliv na rozptyl aktivity AST?

Zjištěné hodnoty v *µmol/l:*

Bez přípravku: 0,409; 0,345; 0,392; 0,377; 0,398; 0,381; 0,400; 0,405; 0,302; 0,337

S přípravkem: 0,341; 0,302; 0,504; 0,452; 0,309; 0,375; 0,479; 0,423; 0,311; 0,333

Postup:

1) Vypočteme výběrové rozptyly s_1^2 a s_2^2*:*

Kontrola: $s_1^2 = 0,00125$

Přípavek: $s_2^2 = 0,00575$

2) Vypočteme testovací kritérium:

$$F = \frac{s_2^{\ 2}}{s_1^{\ 2}} = \frac{0{,}00575}{0{,}00125} = 4{,}618$$

3) Stanovíme počet stupňů volnosti obou výběrů:

$v_1 = n_1 - 1 = 9$ (pro $s_1^{\ 2}$)
$v_2 = n_2 - 1 = 9$ (pro $s_2^{\ 2}$)

4) Kritická hodnota při hladině významnosti α = 0,05 je: $F_{krit\ (0{,}975,\ 9,\ 9)} = 4{,}026$

5) Protože vypočítané $F > F_{krit}$. můžeme vyslovit závěr, že byl zjištěn statisticky **významný rozdíl** mezi rozptyly (tzn. $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) na hladině významnosti 5%.

Závěr: Sledovaný veterinární přípravek má vliv na změnu rozptylu aktivity AST v krevním séru dojnic ($p < 0{,}05$).

7. 2 Testování rozdílu 2 středních hodnot: Studentův *t*-test

Studentův *t*-test je nejčastěji používaným parametrickým testem - používá se pro testování rozdílu **2 středních hodnot μ**. Podle statistické významnosti prokazovaného rozdílu středních hodnot (nejčastěji mezi pokusnou a kontrolní skupinou) usuzujeme na účinnost provedeného pokusného zásahu aplikovaného ve sledovaném experimentu. Výpočet **testovacího kritéria *t*** vychází z odhadů parametrů μ a σ^2 u výběrových souborů: $\bar{x}$ a $\boldsymbol{s^2}$. Vypočtené testovací kritérium porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou (1-α/2 kvantil Studentova *t*-rozdělení pro dané ν a zvolené α).

Podle toho, jaká data (soubory) máme k dispozici pro porovnávání, rozlišujeme několik variant *t*-testu:

7. 2. 1 Porovnání základního a výběrového souboru (jednovýběrový *t*-test)

Jednovýběrový *t*-test používáme pro hodnocení experimentů, kdy známe střední hodnotu μ u základního souboru (např. fyziologické hodnoty sledované veličiny) – tuto je pak možno považovat za konstantu. V experimentu pak ověřujeme hypotézu, že sledovaný výběrový soubor, u něhož byla provedena aplikace testovaného pokusného zásahu, pochází z populace, která má stejnou střední hodnotu jako tato známá konstanta. Nulovou hypotézu kladenou v této variantě *t*-testu můžeme symbolicky vyjádřit následujícím zápisem:

H_0: $\mu = konst.$

Při testu vycházíme z dat sledovaného výběrového souboru, u kterého předpokládáme, že pochází z populace s určitými parametry μ a σ^2 a dále ze známé střední hodnoty základního souboru μ, která je rovna určité (známé) konstantě.

Postup:

1) Vypočteme aritmetický průměr a rozptyl výběrového souboru (počet členů: n).
2) Vypočteme testovací kritérium (statistiku) t:

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

$\bar{x}$ - průměr výběrového souboru

μ - střední hodnota základního souboru

s^2 – rozptyl výběrového souboru

n – počet členů výběrového souboru

3) Stanovíme počet stupňů volnosti výběrového souboru:
   $\nu = n - 1$
4) Vypočtené t porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou $t_{1-\alpha/2(\nu)}$, kde $\nu = n-1$ a α volíme 0,05 nebo 0,01 (viz Příloha: Tab. č. 3 Kvantily $t_{1-\alpha/2\ (\nu)}$ Studentova t-rozdělení):

Je-li $t \leq t_{1-\alpha/2(\nu)} \Rightarrow$ statisticky **nevýznamný** rozdíl testovaných parametrů při zvolené α (nulová hypotéza H_0 platí, tzn. výběrový soubor pochází z populace se známou střední hodnotou $\mu = konst.$). Můžeme tedy říci, že aplikovaný pokusný zásah byl neúčinný, protože nebyla ovlivněna střední hodnota souboru při aplikaci zásahu (symbolicky: $p > 0,05$).

Je-li $t > t_{1-\alpha/2(\nu)} \Rightarrow$ statisticky **významný** rozdíl testovaných parametrů (při hladině významnosti $\alpha = 0,05$) nebo

statisticky **vysoce významný** rozdíl (při $\alpha = 0,01$)

(nulovou hypotézu H_0 nelze přijmout, tzn. výběrový soubor nepochází s populace se známou střední hodnotou a pochází z jiné populace, kde $\mu \neq konst.$). Můžeme tedy říci, že pokusný zásah byl účinný, protože způsobil změnu střední hodnoty u pokusného souboru ve srovnání se známou konstantní střední hodnotou ($p < 0,05$ resp. $p < 0,01$).

Příklad 7.2:

V chovu dojnic je střední hodnota hladiny glukózy v krevním séru $\mu = 3,1$ mmoll^{-1}. Po aplikaci energetického přípravku do krmiva u souboru 10 náhodně vybraných dojnic byly zjištěny následující hladiny glukózy v krevním séru v mmoll^{-1}:

3,1; 2,7; 3,3; 3,1; 3,1; 3,2; 3,0; 2,8; 2,9; 2,7.

Má použitý přípravek vliv na hladinu glukózy krevního séra u dojnic?

Postup:

1) Vypočteme aritmetický průměr a rozptyl výběrového souboru:

$x = 2{,}99$
$s = 0{,}2079$
$s^2 = 0{,}0432$

2) Známá střední hodnota základního souboru: $\mu = 3.1$ mmoll^{-1}.

3) Stanovíme počet stupňů volnosti: $\nu = n - 1 = 9$

4) Vypočítáme testovací kritérium t:

$$t = \frac{|x - \mu|}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{|2{,}99 - 3{,}1|}{\sqrt{\frac{0{,}2079^2}{10}}} = 1{,}578$$

5) Kritická hodnota z tabulek (Tab. č. 3 Kvantily $t_{1-\alpha/2\ (\nu)}$ Studentova t-rozdělení): $t_{(0,975;\ 9)}$ = 2,262

6) Porovnáme vypočítané testovací kritérium s kritickou hodnotou:

Protože vypočítané $t < t_{krit.}$ $\Rightarrow$ můžeme vyslovit závěr, že byl zjištěn statisticky **nevýznamný rozdíl** mezi průměry na hladině významnosti 5% ($p > 0{,}05$).

(nulovou hypotézu H_0 nezamítáme, tzn. že sledovaný výběr pochází z populace se známou střední hodnotou $\mu = 3.1$).

Závěr:

Použitý energetický přípravek nemá vliv na hladinu glukózy krevního séra u dojnic ($p > 0{,}05$).

7. 2. 2 Porovnání dvou výběrových souborů (dvojvýběrový *t*-test)

Tato varianta Studentova *t*-testu se používá pro hodnocení experimentů, kde neznáme střední hodnotu základního souboru, a vycházíme proto pouze z výběrových dat 2 souborů. Tato data mohou být představována buď dvěma měřeními provedenými opakovaně u jedné skupiny jedinců (typicky měření před aplikací pokusného zásahu a po aplikaci – tzv. „*párový pokus*“ neboli „závislé výběry“) nebo dvěma nezávislými skupinami měření („*nepárový pokus*“ neboli „nezávislé výběry“). Testovanou nulovou hypotézu v případě dvojvýběrového *t*-testu můžeme symbolicky vyjádřit následujícím zápisem:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

A) Párový pokus

Párovým *t*-testem porovnáváme data, která tvoří „spárované variační řady“, tzn. že pocházejí ze subjektů, které byly podrobeny dvěma měřením. U **jednoho výběrového souboru** jsou provedena **2 měření**: 1. měření před aplikací pokusného zásahu, 2. po aplikaci pokusného zásahu (případně měření dvou polovin každého odebraného vzorku, přičemž každá polovina je ošetřena různým způsobem). Takto získané hodnoty tvoří páry a reprezentují při testování jak kontrolní tak i pokusnou skupinu porovnávaných dat.

V testu vycházíme z rozdílů naměřených párových hodnot u srovnávaných variačních řad. Testujeme hypotézu, že střední hodnota měření před pokusem a po pokuse se rovnají (případně že rozdíl středních hodnot párových měření je nulový).

Postup:

1) Vypočteme rozdíly párových hodnot u výběrového souboru (*n* - počet párů) a ze zjištěných rozdílů vypočítáme aritmetický průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku „*s*" (resp. rozptyl s^2).
2) Vypočteme testovací kritérium (statistiku) *t*:

$$t = \frac{|\bar{x}|}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

3) Stanovíme počet stupňů volnosti výběrového souboru:
   $\nu = n-1$
4) Vypočtené *t* porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou $t_{1-\alpha/2(\nu)}$, kde $\nu = n-1$ a α volíme 0,05 nebo 0,01 (viz Příloha: Tab. č. 3 Kvantily $t_{1-\alpha/2\ (\nu)}$ Studentova *t*-rozdělení):

Je-li $t \leq t_{1-\alpha/2(\nu)} \Rightarrow$ statisticky **nevýznamný** rozdíl testovaných parametrů při zvolené α. Nulová hypotéza H_0 platí, tzn. že střední hodnota měření před pokusem se neliší od střední hodnoty měření po pokusu. Můžeme tedy říci, že aplikovaný pokusný zásah byl neúčinný, protože nebyla ovlivněna střední hodnota měření provedeného po aplikaci zásahu ($p > 0,05$).

Je-li $t > t_{1-\alpha/2(\nu)} \Rightarrow$ statisticky **významný** rozdíl testovaných parametrů (při hladině významnosti $\alpha = 0,05$) nebo
statisticky **vysoce významný** rozdíl (při $\alpha = 0,01$)

Zamítáme nulovou hypotézu H_0. Znamená to tedy že střední hodnota měření před pokusem se liší od střední hodnoty měření po pokusu. Můžeme tedy říci, že pokusný zásah byl účinný, protože způsobil změnu střední hodnoty u měření provedeného po aplikaci pokusného zásahu ve srovnání se střední hodnotou zjištěnou před aplikací zásahu ($p < 0,05$ resp. $p < 0,01$).

Příklad 7.3:

Zjistěte, zda režim s fyzickou zátěží způsobí změnu hmotnosti u laboratorních potkanů poté, co byli režimu podrobeni. Změny hmotnosti u 12 pokusných jedinců (váha po zátěži mínus váha před zátěží) v g:

0,2; -0,5; -1,3; -1,6; -0,7; 0,4; -0,1; 0,0; -0,6; -1,1; -1,2; -0,8.

Postup:

1) Vypočítáme aritmetický průměr a rozptyl rozdílů párových hodnot:

   $\bar{x} = -0{,}61\ g$

   $s^2 = 0{,}4008\ g^2$

2) Vypočteme testovací kritérium pro párový *t*-test:

$$t = \frac{|\bar{x}|}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{|-0{,}61|}{\sqrt{\frac{0{,}4008}{12}}} = 3{,}389$$

3) Stanovíme počet stupňů volnosti výběrového souboru:
   $\nu = n-1 = 11$

4) Kritické hodnoty nalezené v tabulkách pro zvolenou hladinu významnosti (viz Příloha: Tab. č. 3 Kvantily $t_{1-\alpha/2\ (\nu)}$ Studentova *t*-rozdělení):

   $t_{(0{,}975;\ 11)} = 2{,}201$ $\qquad t_{(0{,}995;\ 11)} = 3{,}106$

5) Vypočtené *t* porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou $t_{1-\alpha/2(\nu)}$:

   Protože vypočítané $t > t_{(0.995;\ 11)}$ $\Rightarrow$ můžeme vyslovit závěr, že byl zjištěn statisticky **vysoce významný rozdíl** mezi průměry párových hodnot na hladině významnosti $\alpha = 0{,}01$.

Závěr:

Režim s fyzickou zátěží způsobí vysoce významný úbytek hmotnosti u laboratorních potkamů ($p < 0{,}01$).

B) Nepárový pokus

Nepárovým t-testem porovnáváme data, která tvoří dva nezávislé výběry, tzn. že pocházejí ze **dvou různých skupin** subjektů. Typicky jde o porovnání hodnot pokusné skupiny (kde byl aplikován pokusný zásah) a kontrolní skupiny (bez aplikace pokusného zásahu). Testujeme nulovou hypotézu, že střední hodnota μ_1 populace, ze které pochází pokusný výběr a střední hodnota μ_2 populace, ze které pochází kontrolní výběr se shodují.

V testu vycházíme z odhadů parametrů obou srovnávaných populací, tj. aritmetického průměru a výběrového rozptylu u pokusného a kontrolního výběru.

Postup:

1) U výběrových souborů vypočteme výběrové charakteristiky:

   1. výběrový soubor (počet členů n_1) : $\bar{x}_1$, s_1

   2. výběrový soubor (počet členů n_2) : $\bar{x}_2$, s_2

2) Oba soubory mohou pocházet z populací, které mají stejný nebo naopak různý rozptylem hodnot sledované veličiny. Protože různá variabilita dat ovlivňuje provedení nepárového t-testu, je nejprve nutno otestovat **rozdíl rozptylů** obou souborů (nulovou hypotézu H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) pomocí F-testu:

$$F = \frac{\text{větší z rozptylů } (s_1^2, s_2^2)}{\text{menší z rozptylů } (s_1^2, s_2^2)}$$

3) Stanovíme stupně volnosti pro F-test:

stupně volnosti čitatele (většího rozptylu): $\nu_V = n_{(1,2)} - 1$

stupně volnosti jmenovatele (menšího rozptylu): $\nu_M = n_{(1,2)} - 1$

4) Ve statistických tabulkách (viz Příloha: Tab. č. 7 Kvantily $F_{0,975}$ (ν_V, ν_M) Fisher-Snedecorova rozdělení) vyhledáme kritickou hodnotu $F_{krit.} = 1 - \alpha/2$ kvantil F-rozdělení o (ν_V, ν_M) stupních volnosti pro zvolenou hladinu významnosti $\alpha = 0,05$.

Podle výsledku *F*-testu rozhodneme o dalším postupu pro nepárový *t*-test:

5a) **Je-li $F \leq F_{0,975\ (\nu V,\ \nu M)}$** $\Rightarrow$ tzn. že platí H_0: $\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$. Oba výběrové soubory pocházejí z populací se shodným rozptylem. V tomto případě zvolíme pro testování rozdílu středních hodnot nepárový ***t*-test pro shodné rozptyly:**

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1) * s_1^2 + (n_2 - 1) * s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} * \frac{n_1 + n_2}{n_1 * n_2}}}$$

Stanovíme stupně volnosti pro t-test: $\nu = n_1 + n_2 - 2$

V případě shodného počtu členů v obou výběrových souborech (**Pro $\boldsymbol{n_1 = n_2 = n}$**), je možno výpočet testovacího kritéria i stupňů volnosti zjednodušit:

Pro $n_1 = n_2 = n$:
$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}}$$

$$\nu = (n-1) .2$$

5b) **Je-li $F > F_{0,975\ (\nu V,\ \nu M)}$** $\Rightarrow$ tzn. že neplatí nulová hypotéza, tedy $\boldsymbol{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}$. Oba výběry pocházejí z populací s různým rozptylem. V tomto případě zvolíme pro testování rozdílu středních hodnot nepárový ***t*-test pro různé rozptyly:**

Nepárový t-test pro různé rozptyly: $$t = \frac{\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Stanovíme stupně volnosti pro *t*-test: $$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

(Pro n_1, $n_2 > 30$: $\nu = \infty$)

V případě shodného počtu členů v obou výběrových souborech (**Pro $n_1 = n_2 = n$**), je možno výpočet testovacího kritéria zjednodušit:

Pro $n_1 = n_2 = n$: $$t = \frac{\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}}$$

6) Vypočtené t porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou $t_{1-\alpha/2(\nu)}$, nalezenou podle daného ν a zvolené hladiny významnosti α (0,05 nebo 0,01) - viz Příloha: Tab. č. 3 Kvantily $t_{1-\alpha/2(\nu)}$ Studentova *t*-rozdělení:

Je-li $t \leq t_{1-\alpha/2(\nu)} \Rightarrow$ statisticky **nevýznamný** rozdíl testovaných parametrů při zvolené α (nulová hypotéza H_0 platí, tzn. že střední hodnota pokusého souboru se neliší od střední hodnoty kontrolního souboru). Můžeme tedy říci, že aplikovaný pokusný zásah byl neúčinný, protože nebyla ovlivněna střední hodnota pokusného souboru vlivem aplikace zásahu ve srovnání se střední hodnotou kontrolního souboru (p > 0,05).

Je-li $t > t_{1-\alpha/2(\nu)} \Rightarrow$ statisticky **významný** rozdíl testovaných parametrů (při hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$) nebo

statisticky **vysoce významný** rozdíl (při $\alpha = 0{,}01$)

(nulovou hypotézu H_0 zamítáme, tzn. že střední hodnota pokusného souboru se liší od střední hodnoty kontrolního souboru). Můžeme tedy říci, že pokusný zásah byl účinný, protože způsobil změnu střední hodnoty u pokusného souboru vlivem aplikace pokusného zásahu ve srovnání se střední hodnotou zjištěnou u kontrolného souboru ($p < 0{,}05$ resp. $p < 0{,}01$).

Příklad 7.4:

Byl sledován účinek nového preparátu na změnu doby srážlivosti krve (v minutách) u prasat. Preparát byl aplikován u pokusného souboru 7 jedinců a byly naměřeny tyto doby srážlivosti krve: 9,9; 9,0; 11,1; 9,6; 8,7; 10,4; 9,5.

U kontrolní skupiny 7 jedinců (bez aplikace přípravku) byly naměřeny následující doby srážlivosti krve: 8,8; 8,4; 7,9; 8,7; 9,1; 9,6; 8,7.

Zjistěte, zda přípravek má vliv na dobu srážlivosti krve?

Postup:

1) Vypočteme aritmetický průměr a rozptyl a stupně volnosti obou výběrových souborů:

Pokusný: $x_1 = 9{,}74\,\text{min}$ $\quad n_1 = 7$

$s_1^2 = 0{,}670\,\text{min}^2$ $\quad \nu_1 = 6$

Kontrolní: $x_2 = 8{,}74\,\text{min}$ $\quad n_2 = 7$

$s_2^2 = 0{,}283\,\text{min}^2$ $\quad \nu_2 = 6$

2) Vypočteme testovací statistiku pro *F*-test: $F = \frac{0{,}670}{0{,}283} = 2{,}367$

3) Vyhledáme kritickou hodnotu pro *F*-test: $F_{krit.\,(0{,}975;\,6{,}6)} = 5{,}820$
(viz Příloha: Tab. č. 7 Kvantily $F_{0{,}975}$ (ν_V, ν_M) Fisher-Snedecorova rozdělení)

Protože $\boldsymbol{F < F_{krit.}} \Rightarrow$ platí H_0 o shodě rozptylů: $\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$

4) Vypočteme testivací kritérium pro nepárový *t*-test pro shodné rozptyly:

$$t = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}} = \frac{9{,}743 - 8{,}743}{0{,}261} = 3{,}834$$

5) Stanovíme počet stupňů volnosti pro *t*-test:

$\nu = (n - 1).2 = 12$

6) Kritické hodnoty pro *t*-test: $t_{krit.\,(0{,}975;\,12)} = 2{,}179$
$t_{krit.\,(0{,}995;\,12)} = 3{,}055$

(viz Příloha: Tab. č. 3 Kvantily $t_{1-\alpha/2}\,(\nu)$ Studentova *t*-rozdělení)

7) Porovnáme vypočtené testovací kritérium *t* s tabulkovými kritickými hodnotami pro různé hladiny významnosti α:

Protože $t > t_{krit.\,(0{,}995\ 12)}$ $\Rightarrow$ neplatí nulová hypotéza H_0, tzn. byl prokázán statisticky vysoce významný rozdíl mezi středními hodnotami obou souborů na hladině významnosti $\alpha = 0{,}01$.

8) *Závěr*:

Testovaný přípravek má vysoce významný vliv na prodloužení doby srážlivosti krve u prasat ($p < 0{,}01$).

7. 3 Testování rozdílu více středních hodnot

V experimentech se často vyskytuje situace, kdy pracujeme s několika skupinami, které byly podrobeny působení různých podmínek (faktorů), jejichž účinek je předmětem našeho sledování. Podmínky působící na jednotlivé skupiny reprezentují v těchto případech různé pokusné zásahy (z nichž jeden může představovat standardní ošetření, které slouží jako kontrola). V těchto situacích potřebujeme zjistit, zda existují rozdíly mezi těmito skupinami, tzn. potřebujeme porovnat jejich průměry navzájem pro všechny možné páry skupin (případně pouze střední hodnoty pokusných skupiny oproti kontrole). Statistické metody, které toto vícenásobné porovnávání středních hodnot umožňují, jsou soustředěny pod souhrnným názvem **analýza rozptylu** (**ANOVA** – Analysis of Variance). Název této statistické metody je odvozen ze skutečnosti, že metoda je založena na vztazích rozptylů porovnávaných výběrových souborů (testování shody středních hodnot se vlastně převádí na testování shody dvou rozptylů (F-test).

Pro validní použití metody analýzy rozptylu pro testování rozdílu více středních hodnot musí být splněny následující **předpoklady**:

- *nezávislost* měření (všechna měření musí být nezávislá uvnitř skupin i mezi skupinami)
- *normalita* dat (hodnoty v každé skupině musí alespoň přibližně odpovídat Gaussovu normálnímu rozdělení)
- *homogenita rozptylů* uvnitř skupin (rozptyly ve všech skupinách musí být alespoň přibližně shodné)

Obecně spočívá základní funkce analýzy rozptylu v posouzení hlavních a interakčních efektů kategoriálních nezávislých proměnných na závisle proměnnou (proměnné) kvantitativního typu. Nezávisle proměnné v analýze rozptylu často nazýváme faktory a jejich hodnoty úrovně faktorů nebo kategorie.

Nejjednodušším případem analýzy rozptylu je **jednofaktorová analýza rozptylu** (analýza rozptylu při jednoduchém třídění, one-way ANOVA), kdy analyzujeme účinek jednoho faktoru na zkoumanou závisle proměnnou. Jde o zobecněnou analogii případu zjišťování rozdílu průměrů mezi dvěma nezávislými skupinami pomocí nepárového t-testu. V případě jednofaktorové analýzy rozptylu jde o zjišťování rozdílů průměrů mezi více skupinami (které reprezentují jednotlivé úrovně neboli kategorie sledovaného faktoru) prostřednictvím výpočtu testovacího kritéria F. Zkoumá se, zda skupiny vytvořené klasifikačním faktorem jsou si podobné, nebo zda jednotlivé průměry tvoří nějaké identifikovatelné shluky (homogenní podskupiny s podobnými hodnotami). Jestliže má působící faktor jenom dvě kategorie (úrovně), úloha je totožná s testováním rovnosti průměrů ve dvou nezávislých výběrech pomocí t-testu.

Příkladem situace, která je vhodná pro statistické řešení pomocí analýzy rozptylu jednoduchého třídění může být např. krmný experiment, v němž sledujeme působení vlivu 2 různých přípravků (A a B) použitých jako aditiva do krmiva na zvyšování váhových přírůstků u kuřat. V pokusu jsou zastaveny 3 skupiny kuřat: skup. K – kontrola (standardní krmná směs), skup.A – přídavek přípravku A, skup.B – přídavek přípravku B. Sledujeme tedy jeden faktor se třemi úrovněmi (K, A, B). Po ukončení výkrmu, poražení a zvážení kuřat je u skupin A a B zjištěna zvýšená průměrná hmotnost. Máme statisticky vyhodnotit, zda zvýšený průměr hmotnosti kuřat u těchto skupin ve srovnání s kontrolou byl způsoben přidáváním přípravků A a B nebo zda se jedná pouze o náhodné zvýšení. Testujeme tedy nulovou hypotézu, že střední hodnoty všech tří skupin se rovnají a testování provádíme na základě analýzy vztahů mezi rozptyly v jednotlivých skupinách – tedy pomocí F-testu, který představuje základ výpočtů při analýze rozptylu.

Základní statistikou počítanou v analýze rozptylu je obecně testovací kritérium F, pomocí něhož se testuje hypotéza, zda průměry ve skupinách určených působícím faktorem (příp. faktory) se od sebe liší více než na základě působení přirozené variability (náhodného kolísání).

Počítaná testovací statistika F zohledňuje variabilitu výběrových průměrů a zároveň přirozenou variabilitu závislé náhodné proměnné. Pro lepší názornost si můžeme představit, že celkovou variabilitu (rozptyl) zkoumané proměnné lze rozdělit na dvě složky: rozptyl „*mezi skupinami*“ (tzn. **rozptyl** výběrových průměrů **kolem společného průměru**, tj. váženého průměru ze všech výběrových průměrů) a rozptyl „*uvnitř skupin*“ (tj. **rozptyl mezi jedinci ve stejné skupině).** Rozptyl „uvnitř skupin“ je podmíněn přirozenou variabilitou jednotlivých hodnot uvnitř skupin, tzn. pro nás neznámou složkou celkové variability, kterou považujeme za náhodné vlivy. O rozptylu „mezi skupinami“ předpokládáme, že je způsoben jednak pokusným zásahem (působícími faktory) a jednak opět náhodnými vlivy. Při porovnání obou rozptylů poměrem (pomocí F-testu) pak můžeme testovat nulovou hypotézu o shodě těchto rozptylů.

Výpočet F-statistiky v analýze rozptylu můžeme zapsat v obecné formě:

$$F = \frac{rozptyl\ "mezi\ skupinami"}{rozptyl\ "uvnitř\ skupin"}$$

Protože předpokládáme, že náhodné vlivy působí stejnou měrou mezi skupinami i uvnitř skupin, můžeme případný rozdíl v rozptylech zjištěný F-testem připsat na vrub působícího pokusného zásahu.

Vypočtené tetovací kritérium F porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou (Tab. č. 7 Kvantily $F_{0,975}$ (ν_V, ν_M) Fisher-Snedecorova rozdělení) a pokud celková variabilita měřená pomocí F-statistiky překročí tuto kritickou hodnotu, zamítneme hypotézu o shodě rozptylů a tím i **nulovou hypotézu analýzy rozptylu**, že střední hodnoty sledovaných skupin se neliší (při jednoduchém třídění je to hypotéza **H0:** $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_m$, kde m je počet srovnávaných skupin). V tomto případě platí alternativní hypotéza H_1: Ne všechny střední hodnoty jsou stejné (tj. alespoň jedna ze středních hodnoty se liší od ostatních).

Pokud zamítneme nulovou hypotézu o shodě testovaných středních hodnot, ještě nám to nic neříká o rozdílech mezi jednotlivými průměry. Proto je nutné, v případě, že analýza rozptylu zamítne globální nulovou hypotézu, doplnit rozbor ještě dalšími metodami následného zkoumání existujících rozdílů. Tyto tzv. **multikomparativní testy** (testy pro mnohonásobné porovnávání) pak dávají výsledkem statistickou významnost jednotlivých rozdílů středních hodnot u všech možných párů porovnávaných skupin. Mezi nejčastěji používané testy pro mnohonásobné porovnání všech dvojic skupin v experimentu navzájem patří např. Tukey-test, Sheffe-test, Student-Neuman-Keuls-test (SNK test) ad. V případě, kdy jedna ze skupin v experimentu slouží jako kontrolní skupina (bez aplikace pokusného zásahu), může nám jít pouze o porovnání středních hodnot pokusných skupin vzhledem k této kontrole - pro tuto situaci je vhodný např. Dunnett-test.

Každý z testů pro mnohonásobné porovnávání má trochu jiné vlastnosti, liší se především tím, jak ošetřují při testování velikost chyby 1. druhu α (hladinu významnosti testu). Některé z testů, např. Tukey-HSD test („honestly“ significant difference test) jsou spíše *konzervativní*, tzn. že si udržují za dosti volných předpokladů požadovanou hladinu významnosti v celém experimentu a díky tomu, že provádějí příslušná rozhodnutí zpravidla na menší hladině významnosti, nedovolí, aby pravděpodobnost chyby α nekontrolovatelně vzrostla. Jiné testy, např. LSD test (least significant difference test) jsou spíše *liberální*, tzn. že je u nich velmi pravděpodobné zamítnutí nulové hypotézy o shodě porovnávaných dvojic středních hodnot (jinými slovy, můžeme u nich snadno získat statistickou významnost rozdílů testovaných dvojic středních hodnot). Je třeba si však uvědomit, že tyto výsledné významnosti mohou být někdy falešné, protože liberální testy nedostatečně upravují (tj. nesnižují) hladinu významnosti při testování rozdílů u jednotlivých dvojic skupin. Chyba 1. druhu α v celém experimentu tak může neúměrně vzrůst.

Často se v praxi setkáváme s pokusy, ve kterých nesledujeme jen jeden, ale více působících faktorů, např. vliv krmení a plemene, vliv léku v různých stádiích onemocnění, vliv živné půdy a způsobu kultivace na růst zárodků, vliv různých druhů antibiotik a jejich dávky apod. Pokud zkoumáme vliv dvou a více faktorů působích na závisle proměnnou, hovoříme o **vícefaktorové analýze rozptylu**. Při tomto postupu rozlišujeme mezi hlavními efekty a efekty, které jsou způsobeny interakcemi mezi faktory při působení na závisle proměnnou. *Hlavní efekt* je přímý efekt faktoru na závisle proměnnou. *Interakční efekt* představuje spojený efekt kombinace dvou nebo více faktorů na závisle proměnnou. Nejjednodušším případem vícefaktorové analýzy rozptylu je **analýza rozptylu dvojného třídění** (two-way ANOVA), při níž zkoumáme vliv dvou faktorů na závisle proměnnou. Pomocí analýzy rozptylu dvojného třídění analyzujeme často tzv. blokové experimenty, při nichž zkoumáme vliv určitého faktoru (označeného např. A), který plánovitě měníme, zatímco druhý faktor (označený jako B) považujeme za vliv rušivý. Při analýze se snažíme vliv rušivého faktoru oddělit od vlivu faktoru A. Proto se při provádění takového experimentu nejdříve sledované objekty (např. pacienti s pneumonií) rozdělí do tzv. bloků podle úrovně faktoru B (např. dávka antibiotika) a uvnitř bloku se objekty náhodně přiřadí k úrovním faktoru A (např. druh použitého antibiotika). Analýzou rozptylu pak studujeme rozdíl mezi účinkem jednotlivých druhů antibiotik podávaných v různých dávkách. Interpretace výsledků analýzy rozptylu pro dvojné třídění závisí silně na přítomností interakcí mezi faktory. Interakce jsou jediným podstatným problémem při zobecnění postupu jednoduché analýzy rozptylu pro použití při hodnocení působení více faktorů. Konečná interpretace výsledků anylýzy rozptylu dvojného (i vícenásobného) třídění pak spočívá ve vyhodnocení vlivu kombinací hlavních a interakčních efektů působících v experimentu.

Komplexní problematika analýzy rozptylu a podrobnější popis jednotlivých metod a postupů shrnovaných pod pojmem analýza rozptylu (včetně všech jejích variant a následných multikomparativních testů) je značně složitá a přesahuje rozsahový rámec tohoto učebního textu. Odkazujeme proto případné zájemce o detailnější studium této problematiky na další statistickou literaturu.

Kapitola 8

Neparametrické testy

Neparametrické testy se používají pro porovnání souborů statistických dat, u nichž nelze předpokládat normální rozdělení pravděpodobností sledovaného znaku – náhodná veličina má **neznámé rozdělení**, které nelze charakterizovat pomocí parametrů μ a σ. Nulová hypotéza, kterou testujeme v neparametrických testech se týká pouze obecných vlastností rozdělení sledované veličiny ve statistických souborech. Zjišťujeme, zda se shoduje nebo neshoduje rozdělení četností sledovaných veličin, tzn. testujeme **hulovou hypotézu**, která tvrdí, že se **shoduje** tvar křivky **rozdělení** v porovnávaných souborech dat.

Výpočty u neparametrických testů vycházejí z pořadových čísel jednotlivých hodnot variační řady ("pořadové testy"), mohou být proto použity i u dat, která nemají přesný číselný význam a jsou ve skutečnosti jen pořadím. Neparametrické testy jsou vhodné pro i ordinální znaky, jenž jsou hodnoceny subjektivní stupnicí hodnot, která představuje v podstatě pořadová čísla (např. bodování v chovatelských soutěžích, školní klasifikace, známky při bonitacích, degustačních soutěžích, stupnice pro chování zvířete v experimentu apod.).

Využití neparametrických testů je obecnější než u parametrických testů, protože je lze použít jak pro data, která neodpovídají normálnímu rozdělení pravděpodobností, tak i pro data, která normálnímu rozdělení odpovídají. V tomto případě se používají neparametrické testy obvykle k orientačnímu hodnocení, kdy se pro testování nepoužijí původní naměřená data, ale pouze jejich pořadová čísla ve variační řadě vytvořené určitým postupem z hodnot obou porovnávaných souborů. Výpočty jsou obvykle značně jednodušší, ale přesnost a rozlišovací schopnost (síla testu) neparametrických testů není tak vysoká jako u testů parametrických – tzn., že mezi testovanými soubory musí existovat výrazný rozdíl, aby byl prokázán v testu jako statisticky významný.

8. 1 Mann-Whitneyův pořadový test

Používá se pro hodnocení **nepárových** pokusů, kdy porovnáváme 2 různé výběrové soubory (*A*, *B*). Testujeme hypotézu, že veličina X odpovídající pokusnému zásahu „*A*“ a veličina Y odpovídající pokusnému zásahu „*B*“ (nebo kontrole) mají totéž rozdělení pravděpodobností. Přitom veličiny X a Y nemusí odpovídat Gaussovu normálnímu rozdělení, stačí předpoklad, že jsou spojité.

Měření na pokusných jednotkách po zásahu „*A*“ označíme $x_1, x_2, x_3,...x_{n1}$ (veličina X) a měření na pokusných jednotkách po zásahu „*B*“ označíme $y_1, y_2, y_3,...yn_2$ (veličina Y). Pak všechna měření uspořádáme bez ohledu na to, ze které skupiny pocházejí vzestupně podle velikosti, čímž získáme tzv. **směsný výběr** (veličina z)**:** $z_1 < z_2 < z_3 <......< z_n$ ($n = n_1 + n_2$). Jednotlivým hodnotám přiřadíme **pořadí** (od 1. do n.). Pokud se 2 nebo více hodnot ve směsném výběru shodují, přiřadíme jim tzv. průměrné pořadí (např. pokud jsou 1. a 2. hodnota z_1 i z_2 stejné, tak obě dostanou pořadové číslo 1,5. Toto bylo vypočteno z původních pořadí jako jejich průměr: (1. + 2.)/2 = 1,5).

Neliší-li se pokusné zásahy, pak by veličiny X a Y měly mít shodné rozdělení pravděpodobností a tím i průměrné pořadí (v ideálním případě by ve směsném výběru následovaly za sebou vždy 2 stejné hodnoty- jedna ze skupiny „*A*“ a druhá ze skupiny „*B*“). V tomto případě, ale i v případě alespoň částečné shody souborů bychom tedy měli dostat pro každou skupinu (*A, B*) zhruba stejný součet pořadových čísel.

Označíme: $\boldsymbol{R}_{\text{A}}$ - součet pořadí příslušejících hodnotám veličiny X

$\boldsymbol{R}_{\text{B}}$ - součet pořadí příslušejících hodnotám veličiny Y

Přitom platí, že součet všech pořadí ($n = n_1 + n_2$) musí odpovídat součtu číslic od 1 do n podle vzorce: $R_A + R_B = \dfrac{n*(n+1)}{2}$

U rozsáhlých souborů, kde je sčítání všech pořadových čísel směsného výběru pro obě skupiny pracné, můžeme na základě výše uvedeného vztahu použít následující ulehčení výpočtu: sečteme jen pořadová čísla u jedné skupiny a u druhé skupiny pak součet pořadí odvodíme z tohoto vztahu.

Vypočteme testovací statistiky:

$$U_A = n_1 * n_2 + \frac{n_1 * (n_1 + 1)}{2} - R_A \qquad U_B = n_1 * n_2 + \frac{n_2 * (n_2 + 1)}{2} - R_B$$

Výpočet je opět možno usnadnit, protože platí následující vztah mezi oběma statistikami:

$U_A + U_B = n_1 * n_2$

Jako **testovací kritérium** použijeme **menší** z čísel U_A a U_B, tj.: $\boldsymbol{U = \min (U_A, U_B)}$ a porovnáme ho s tabulkovou kritickou hodnotou Mann - Whitneyova testu pro příslušné n_1, n_2 a zvolenou hladinu významnosti α (viz Příloha: Tabulka č. 8 Kritické hodnoty Mann-Whitneyova testu).

Je-li $U < U_{(\alpha,\ n1,\ n2)}$ => **zamítáme** hypotézu H_0 o shodnosti rozdělení veličin X a Y, tj. rovnosti vlivu pokusných zásahů na zkoumanou veličinu.

Je-li $U > U_{(\alpha,\ n1,\ n2)}$ => **nemůžeme zamítnout** hypotézu H_0 shodnosti rozdělení veličin X a Y, tj. rovnosti vlivu pokusných zásahů na zkoumanou veličinu.

Příklad 8.1:

Byl sledován vliv vitamínového doplňku do krmiva na zvyšování váhových přírůstků u selat. U 19 z 38 náhodně vybraných selat byl aplikován vitamínový přípravek v krmné směsi (pokusný zásah „*B*“). Váhové přírůstky v kg pro standardní směs (pokusný zásah „*A*“) byly následující:

27 35 38 37,5 29,5 33,5 37 31,5 34 32 33 34,5 30 39 37 34 29 31,5 32,5

Váhové přírůstky po pokusném zásahu „*B*“ (vitamínový doplněk) byly (v kg):

32,5 30,5 36 38,5 36 43 31 40,5 36 42 35,5 40 42,5 38 41 36,5 44 32 33

Postup:

1) Vytvoříme směsný výběr seřazením všech hodnot z obou souborů vzestupně do jedné variační řady.

   Směsný výběr: 27 29 29,5 30 30,5 31 31,5 ....42,5 43 44

   Pokusný zásah: *A A A A B B A* **......................** *B B B*

2) Přidělíme pořadová čísla:
   Pořadí: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. ………….. .... 36. 37. 38.

3) Vypočteme součty pořadí pro pokusný zásah „*A*“ a pokusný zásah „*B*“:

   R_A =282 R_B = 38.39/2 - 282 = 459

4) Vypočteme testovací statistiky U_A a U_B:

   U_A = 19.19 + 19.20/2 - 282 - 269 U_B = 19.19 - U_A = 92

5) Jako testovací kritérium vybereme menší ze statistik U_A a U_B:

   Test. kritérium**:** ***U*** **=** min (269, 92) = **92**

6) Vyhledáme tabulkové kritické hodnoty pro Mann-Whitneyův test (viz Příloha: Tabulka č. 8 Kritické hodnoty Mann-Whitneyova testu).

   5% tabulková kritická hodnota pro $n_1 = n_2 = 19$ je 113,0 .

   1% tabulková kritická hodnota pro $n_1 = n_2 = 19$ je 93,1.

7) Porovnáme vypočtené testovací kritérium *U* s tabulkovou kritickou hodnotou:

   Protože $U < 93{,}1$, zamítáme hypotézu shodnosti vlivů pokusných zásahů *A* a *B*

8) *Závěr*: Protože se porovnávané způsoby výkrmů (pokusný zásah „*A*“ a „*B*“) statisticky vysoce významně liší ($p < 0{,}01$), znamená to, že vitamínový doplněk statisticky vysoce významně zvyšuje hmotnostní přírůstky u selat.

8. 2 Wilcoxonův test

Používá se pro hodnocení **párových pokusů** (tzn. 2 měření provedaná na jednom výběrovém souboru). Testuje hypotézu rovnosti distribučních funkcí na základě ověření symetrického rozložení sledované veličiny.

V testu vycházíme z párových hodnot dvou měření na jednom výběrovém souboru: veličiny X a X' (obvykle měření před a po pokusném zásahu, případně měření dvou polovin každého odebraného vzorku ošetřených různým způsobem). Zjistíme **rozdíly mezi párovými hodnotami** (*veličina* ***Z***) – některé rozdíly budou kladné, jiné záporné a v případě shody párových hodnot budou rozdíly nulové). Nulové rozdíly z dalšího hodnocení vyřazujeme (nejde o to, zjistit, co je v souborech stejné, ale naopak to, co je rozdílné).

Nenulové rozdíly uspořádáme vzestupně bez ohledu na znaménko:

Např.: $|+z_3| < |+z_1| < |-z_5| < |-z_4| < |+z_6| <$…………....

Každému rozdílu přiřadíme **pořadí** (stejným hodnotám průměrné pořadí):

1. 2. 3. 4. 5. ……..……*n*.

(n - počet párů s nenulovým rozdílem)

Testujeme hypotézu, že rozdíly jsou rozloženy symetricky kolem 0, tzn., že součet kladných a záporných rozdílů by měl být roven 0 (v případě, že platí shoda rozdělení obou veličin X a X'). Proto by se také neměl příliš lišit součet pořadí kladných a záporných rozdílů.

Označíme:

W_+ - součet pořadí odpovídajících kladným rozdílům

W_- - součet pořadí odpovídajících záporným rozdílům

Přitom platí: $W_+ + W_- = \frac{n*(n+1)}{2}$ *(možno použít pro usnadnění výpočtu)*

Jako **testovací kritérium** slouží menší z obou součtů W_+ a W_-, můžeme tedy psát:

$\mathbf{W = \min(W_+, W_-)}$.

Porovnáme vypočtené testovací kritérium W s tabelovanou kritickou hodnotou pro příslušné n a zvolenou hladinu významnosti α (viz Příloha: Tab. č. 9 Kritické hodnoty pro Wilcoxonův test):

Je-li $W < W_{(\alpha,\ n)}$ => **zamítáme** hypotézu o shodnosti rozdělení veličiny X a X' tj. symetrického rozložení + a - rozdílů párových hodnot

(tzn. že pokusný zásah je účinný – hodnoty před a po pokusu se liší ve svém rozdělení).

Je-li $W > W_{(\alpha,\ n)}$ => **nemůžeme zamítnout** hypotézu o shodnosti rozdělení veličiny X a X', tj. symetrického rozložení + a - rozdílů párových hodnot

(tzn. že pokusný zásah je neúčinný – hodnoty před a po pokusu se neliší ve svém rozdělení).

Příklad 8.2:

Zhodnoťte výsledky testu streptokokové nákazy po ošetření dvěma preparáty (A a B). Od $n = 8$ pacientů byly odebrány vzorky stěrů a rozděleny každý na polovinu. První polovina byla ošetřena antibiotikem „*A*“, druhá antibiotikem „*B*“. Poté byla provedena kultivace na Petriho miskách a zjišťovány rozdíly v počtu kolonií v obou řadách „*A*“ a „*B*“.

Uspořádané rozdíly: 1 -1 1 3 4 5 6 13

Zjistěte, zda se preparáty A a B liší ve své účinnosti.

Postup:

1) Přidělíme uspořádaným rozdílům pořadová čísla:

Uspořádané rozdíly: 1 -1 1 3 4 5 6 13

Pořadí rozdílů: 2. 2. 2. 4. 5. 6. 7. 8.

(u 1. až 3. rozdílu použito průměrné pořadí: 6/3=2.)

2) Sečteme pořadová čísla pro kladné a záporné rozdíly:

$W_- = 2$

$W_+ = 8 * 9 /2 - 2 = 34$

3) Jako testovací kritérium vybereme menší z obou součtů:

Test. kritérium**:** $W = \min (2, 34) = 2$

4) Vyhledáme tabulkovou kritickou hodnotu pro příslušné $n = 8$ (počet nenulových rozdílů) a zvolenou hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ (viz Příloha: Tab. č. 9 Kritické hodnoty pro Wilcoxonův test): kritická hodnota je 3,7.

5) Porovnáme vypočítané testovací kritérium s tabulkovou kritickou hodnotou:

Protože $W = 2 < 3{,}7 \Rightarrow$ zamítáme hypotézu o shodě rozdělení párových veličin.

6) *Závěr*: Přípravky *A* a *B* se statisticky významně liší ve své účinnosti ($p < 0{,}05$).

8. 3 Znaménkový test

Používá se pro **párové** pokusy v případech, kdy studovanou veličinu nemůžeme přesně měřit. V testu nepoužíváme žádné naměřené hodnoty, stačí nám rozhodnutí, zda pokusný zásah „*A*“ zapůsobil více či méně než pokusný zásah „*B*“. Pro svou jednoduchost se znaménkový test používá zejména k orientačnímu hodnocení předběžných pokusů, např. v mikrobiologii. Principielně jde o zjednodušený Wilcoxonův test, kdy nepoužíváme hodnoty rozdílů, ale pouze jejich znaménka.

Máme-li *n* párových pokusných jednotek (např. 2 řady Petriho misek s rozdílně ošetřenými kulturami – *A*, *B*) zjistíme rozdíly mezi párovými jednotkami (např. vizuelně posoudíme hustotu nárůstu kultur). Zjištěné rozdíly pak tvoří dvourozměrnou veličinu (X, X'). Při porovnání každého páru pokudných jednotek mohou nastat tři případy:

$X > X'$ - pokusný zásah *A* zapůsobil více než *B* (označíme znaménkem +)

$X < X'$ - tzn., že pokusný zásah *A* zapůsobil méně než *B* (označíme znaménkem -)

$X = X'$ - pokusný zásah *A* zapůsobil stejně jako *B* (nulový rozdíl – vyřadíme z hodnocení)

V dalším postupu vycházíme z úvahy, že shodují-li se pokusné zásahy „*A*“ a „*B*“ ve svém působení, pak by se měl rovnat počet kladných a záporných znamének (v ideálním případě naprosté shody obou pokusných zásahů by byly všechny rozdíly nulové).

Označíme:

m_+ - počet kladných rozdílů (znamének)

m_- - počet záporných rozdílů (znamének)

Při sčítání znamének ve velmi rozsáhlých souborech lze opět využít zjednodušení postupu, protože platí vztah:

$$m_+ + m_- = \frac{n*(n+1)}{2} \quad ,$$

kde *n* je počet nenulových rozdílů.

Jako testovací kritérium slouží menší z obou součtů m_+ a m_-, můžeme tedy psát:

Testovací kritérium: $\boldsymbol{m = \min(m_+, m_-)}$

Vypočtené testovací kritérium *m* porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou pro příslušné *n* (počet nenulových rozdílů) a zvolenou hladinu významnosti α (viz Příloha: Tabulka č. 10 Kritické hodnoty pto znaménkový test):

Je-li $m < m_{(n,\alpha)}$ => **zamítneme hypotézu** o shodě vlivů pokusných zásahů „*A*" a „*B*"

Je-li $m > m_{(n,\alpha)}$ => **nemůžeme zamítnou hypotézu** o shodě vlivů pokusných zásahů „*A*" a „*B*"

Příklad 8. 3:

Od $n = 15$ pacientů byly odebrány vzorky moči. Na první polovinu každého odběru byl aplikován Furantoin (*F*) a na druhou Penicilín (*P*). Po 24 hod. kultivaci byl sledován počet bakterií v 1. a 2. polovině každého odběru. Zjistěte, zda se Furantoin a Penicilín liší ve své účinnosti.

Postup:

1) Posoudíme rozdíly mezi párovými jednotkami:

u 13 případů byl počet bakterií menší u „*F*" než u „*P*" (tzn. $F < P$)
u 1 případu byl počet bakt. větší u „*F*" než u „*P*" (tzn. $F > P$)
u 1 případu nebylo možno rozhodnout (tzn. $F = P$)

2) Sečteme kladná a záporná znaménka:

$m_+ = 13$ $\qquad m_- = 1$

Opravíme rozsah souboru: nenulové rozdíly $n = 14$

3) Jako testovací kritérium slouží menší z obou součtů m_+ a m_-, můžeme tedy psát:
Test. kritérium**:** $m = \min(13, 1) = \mathbf{1}$

4) Kritická hodnota pro $\alpha = 0{,}05$ a $n = 14$ párů je 2
(viz Příloha: Tabulka č. 10 Kritické hodnoty pto znaménkový test).

5) Vypočtené testovací kritérium *m* porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou pro příslušné *n* (počet nenulových rozdílů) a zvolenou hladinu významnosti α:

Protože $m < 2 \Rightarrow$ zamítáme hypotézu shodného působení obou pokusných zásahů.

6) *Závěr:* Byl prokázán statisticky významný rozdíl ($p < 0{,}05$) v účinnosti Furantoinu a Penicilínu na růst bakterií ve vzorcích moči pacientů.

Kapitola 9

Hodnocení závislosti 2 kvantitativních znaků

Sledováním vztahů mezi 2 a více náhodnými proměnnými (statistickými znaky) u jednoho souboru se zabývá **vícerozměrná statistika** (v případě závislosti 2 veličin je to **dvojrozměrná statistika**). Říkáme, že dvě veličiny jsou závislé, pokud spolu jejich hodnoty navzájem určitým systematickým způsobem korespondují (odpovídají si). Např. je evidentní, že lidé s velkou tělesnou výškou mají obvykle také vyšší tělesnou hmotnost než lidé s nižším vzrůstem; proto můžeme říci, že výška a váha (tělesná hmotnost) u lidí jsou dvě závislé náhodné veličiny. Závislosti dvou náhodných veličin ve statistice řeší dvojrozměrná statistika, jejímž úkolem je popsat vhodným způsobem vzájemný vztah obou veličin a kvantifikovat ho pomocí určitých parametrů (koeficientů).

Vztahy mezi náhodnými veličinami, které obvykle sledujeme v oblasti biologických a medicínských věd, nemají ryze funkčně deterministický charakter. Proto je nutné použít pro jejich analýzu statistické metody. V našem výkladu budeme klást důraz na vztahy mezi 2 proměnnými, kterými se zabývá dvojrozměrná statistika. Příslušná oblast statistiky hodnotící závislosti kvantitativních statistických znaků (spojitých veličin) se nazývá korelační a regresní analýza. **Korelační analýza** zkoumá vztahy proměnných pomocí různých měr závislosti, které nazýváme korelační koeficienty. Pomocí korelačních koeficientů je kvantitativně vyjádřena těsnost (síla) *vzájemné závislosti* obou sledovaných proměnných. **Regresní analýza** studuje jaký vztah existuje mezi proměnnými (lineární, kvadratický, logaritmický apod.) a jak se mění závislá proměnná Y v závislosti na změnách ji podmiňující (nezávislé) proměnné X. Jde tu tedy o *jednostrannou závislost*, na rozdíl od korelační analýzy, která studuje *dvoustranný* reciproční vztah obou náhodných proměnných.

9. 1 Funkční a statistická závislost

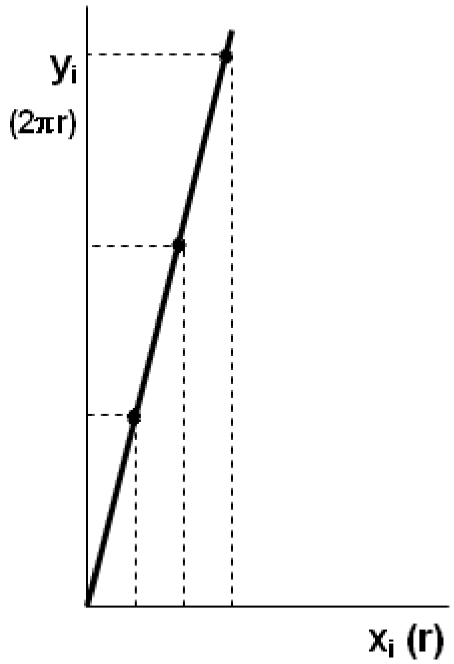
Vztahy mezi proměnnými můžeme obecně rozdělit do dvou základních skupin:

1) **Funkční závislost**, která je typická pro vztahy mezi proměnnými v exaktních vědách, jako je např. matematika nebo fyzika. Jde o takovou závislost, kdy každé číselné hodnotě jedné proměnné x_i odpovídá přesně jedna hodnota druhé proměnné y_i. Veličinu X považujeme za tzv. *nezávislou* proměnnou a veličinu Y pak za tzv. *závislou* proměnnou. Tuto funkční závislost mezi veličinami lze přesně popsat určitou **rovnicí** (vzorcem).

Funkční závislost dvou veličin je výrazem **pevného příčinného** vztahu, který není ovlivněn žádnými náhodnými činiteli, tzn. že hodnoty závislé veličiny Y jsou determinovány a mění se pouze v závislosti na změnách hodnot ji podmiňující nezávislé veličiny X.

Příkladem funkční závislosti mezi proměnnými může být např. vztah mezi poloměrem kruhu (r – *nezávislá veličina*) a obvodem kruhu (závislá veličina). Tento vztah můžeme vyjádřit pomocí známé rovnice $y = 2\pi r$. U závislostí je vždy vhodné provést i grafickou interpretaci. Vynesením dat obou proměnných do souřadnicového systému (např. na milimetrový papír nebo zobrazením na displeji počítače pomocí vhodného softwaru) získáme tzv. *XY* graf dané závislosti. Pro výše uvedený příklad funkční závislosti mezi poloměrem kruhu a jeho obvodem (**lineární závislost**) bychom dostali graf přímky (Obr. č. 9. 1).

Obr. 9. 1 Graf lineární závislosti y = 2πr.



Dalším příkladem funkční závislosti mezi proměnnými mohou být různé typy závislostí *nelineárních*, kam patří např. závislost:

- **kvadratická**, popsaná rovnicí: $y = ax^2 + bx + c$

Grafickým vyjádřením kvadratické závislosti mezi proměnnými *X* a *Y* jsou různé typy parabol ("parabolická závislost").

- **hyperbolická**, popsaná rovnicí: $y = \frac{b}{x} + c$

Jde o závislost nepřímou, jejímž grafickým vyjádřením jsou různé typy hyperbol (vždy klesající funkce).

- **logaritmická**, popsaná rovnicí: $y = log\, x$

- **exponenciální**, popsaná rovnicí: $y = a^x$

Druhou skupinu závislostí mezi dvěma proměnnými tvoří:

2) **Statistická (korelační) závislost**, která je typická pro vztahy mezi proměnnými (statistickými znaky) sledovanými v biologii, lékařství a dalších málo exaktních vědách. Tady funkční závislost mezi veličinami prakticky neexistuje, většina přírodních jevů má charakter velmi proměnlivý a nestálý, jde tu většinou o spojení celého komplexu různých příčin a účinků včetně působení **náhodných vlivů**, které nejsme schopni při sledování vyloučit. Z toho vyplývá i charakter závislostí mezi náhodnými veličinami v biologických a lékařských vědách. Tato závislost má

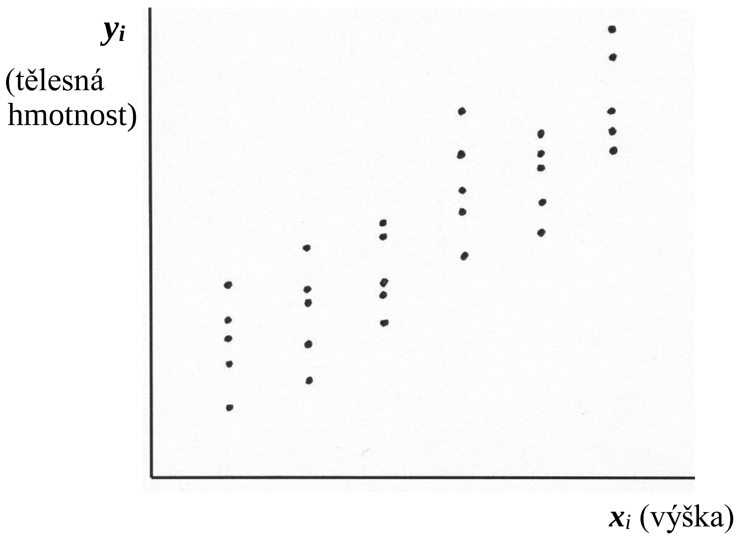
relativní charakter a používáme pro ni pojem statistická nebo také *stochastická* či *korelační* závislost.

Korelační závislost představuje více méně **volnou závislost**, kdy vztah mezi proměnnými (přírodními jevy) je takový, že existence (změna) jedné proměnné či proměnných vyvolává existenci (změnu) jiné proměnné či proměnných jen s určitou **pravděpodobností** („znaky spolu korelují“). Jediné číselné hodnotě x_i jedné veličiny (nezávislé proměnné) může v případě korelační závislosti odpovídat celá řada náhodných hodnot druhé veličiny y_i (závislá proměnná).

Grafickým vyjádřením korelačního vztahu je tzv. **bodový diagram** nebo také dvojrozměrný bodový graf, který získáme vynesením dat obou náhodných veličin do souřadnicového sytému *XY*. Získáme tím základní představu o společném rozdělení obou proměnných. Každý bod odpovídá jednomu páru měření, tzv. **korelační dvojici** (x_i, y_i).

Příklad bodového diagramu můžeme vidět na obrázku 9. 2, který znázorňuje grafické vyjádření korelačního vztahu mezi tělesnou výškou a tělesnou hmotností u lidí (jedinci s větší výškou mají obvykle i větší váhu a naopak).

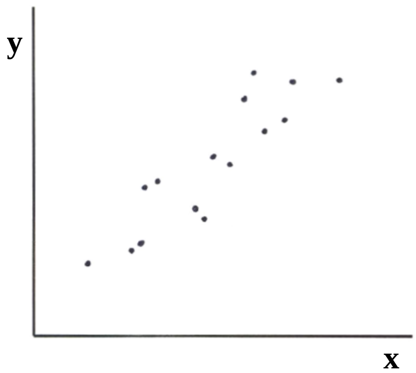
Obr. 9. 2 Bodový diagram pro korelační závislost (tělesná výška a hmotnost)



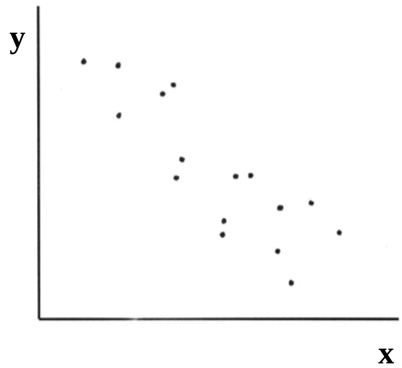
Podle charakteru rozložení bodů v bodovém diagramu můžeme odhadovat, zda je mezi proměnnými silná či spíše volnější závislost, anebo jestli jsou na sobě obě sledované veličiny evidentně nezávislé.

Jsou-li body v bodovém diagramu seskupeny podél některého směru (říkáme, že tvoří tzv. „korelační pás“), svědčí to o přítomnosti určitého vztahu mezi sledovanými proměnnými. Korelační závislost přitom může být buď přímá („**pozitivní korelace**“ – obr. 9. 3) nebo nepřímá („**negativní korelace**“ – obr. 9. 4).

Obr. 9.3 Přímá korelace

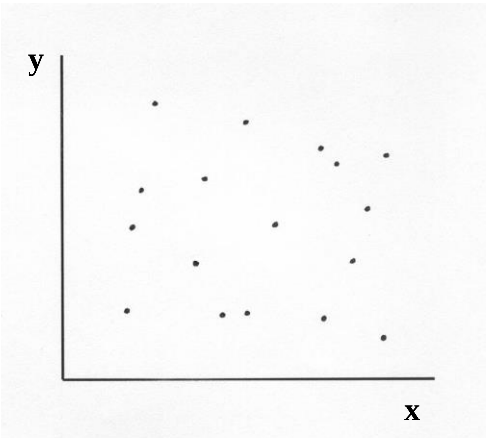


Obr. 9.4 Nepřímá korelace



Jsou-li body v bodovém diagramu rozloženy víceméně rovnoměrně po celé ploše, je to důkazem toho, že závislost mezi oběma sledovanými proměnnými je velmi slabá, případně vůbec neexistuje. Říkáme, že veličiny spolu nekorelují, případně, že mají nulovou korelaci (Obr. 9. 5).

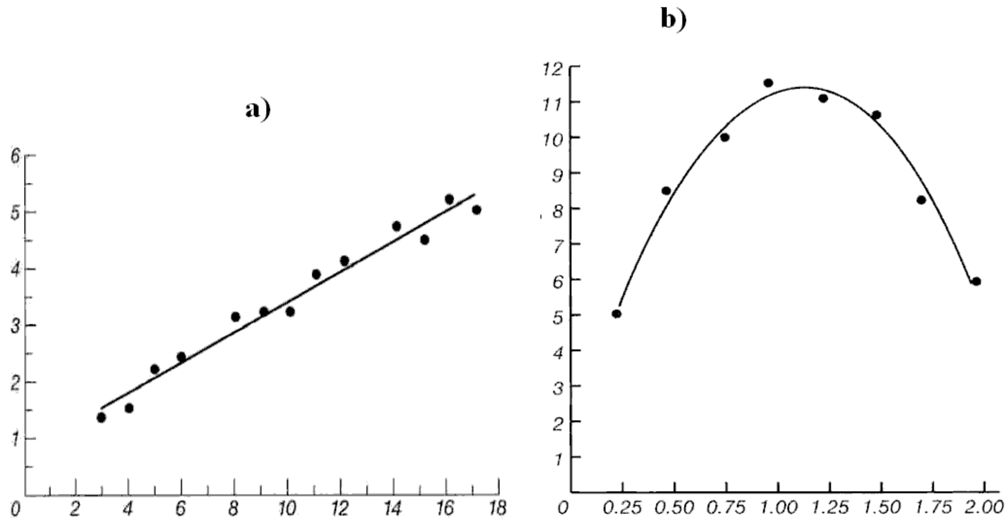
Obr. 9.5 Nulová korelace



Máme-li co nejvýstižněji charakterizovat a popsat korelační vztah mezi dvěma náhodnými veličinami v biostatistice, tak se snažíme zjistit, jestli se jejich statistická závislost blíží k některé funkční závislosti a pokusíme se ji určitou abstrakcí převést na funkční (provádíme **odhad nejbližší funkční závislost – tzv. aproximaci**). Tuto nejbližší funkční závislost pak vyjádříme rovnicí. Zjišťováním nejvýstižnější funkční závislosti, která by byla vhodná pro popis daného korelačního vztahu se zabývá *regresní analýza*, o které budeme pojednávat níže. Úkolem je výpočet tzv. regresních koeficientů pro rovnici nejvýstižnější funkce, která se použije pro popis sledované korelační závislosti.

Podle charakteru rozložení bodů v bodovém diagramu můžeme rozlišit dva typy základních korelačních závislostí mezi dvěma náhodnými proměnnými: lineární nebo nelineární závislost (Obr. 9. 6). Tyto dva typy korelační závislosti se liší ve svém způsobu a použité metodice statistického hodnocení.

Obr. 9. 6 Lineární (a) a nelineární (b) korelační závislost

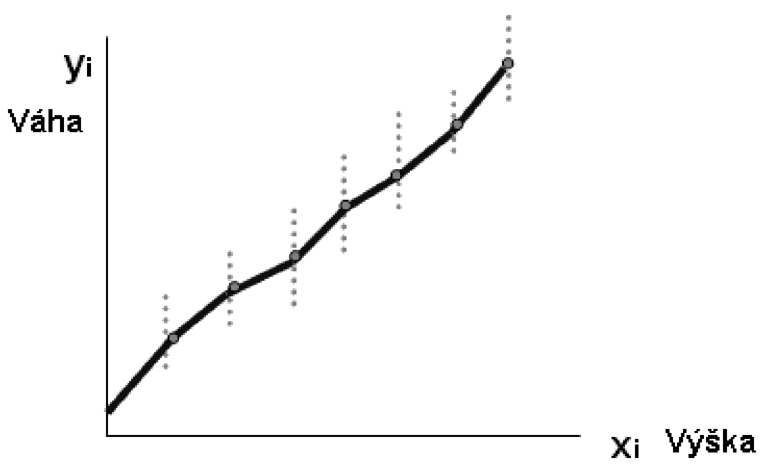


9. 2 Lineární korelační závislost

Lineární regresní funkce představuje jednu z nejčastěji používaných funkcí, kterou používáme pro popis a hodnocení korelačních vztahů mezi dvěma náhodnými veličinami v oblasti biostatistiky. Postup hodnocení lineární korelační závislosti obvykle sestává z několika následujících kroků:

1) Konstrukce tzv. **empirické křivky**, která popisuje sledovaný korelační vztah na úrovni *výběrového souboru,* na kterém bylo provedeno měření obou veličin. Tato křivka slouží jako odhad skutečné závislosti (lineární regresní funkce), která je předpokládána pro celý základní soubor. Data pro sestrojení empirické křivky získáme tak, že pro stejnou hodnotu nezávislé proměnné $\boldsymbol{x}_i$ zjistíme měřením několik náhodných hodnot závislé proměnné $\boldsymbol{y}_i$ (získáme „korelační dvojice“). Jako příklad můžeme uvést měření tělesné výšky a váhy u náhodného výběru n osob, kdy měřením každého jedince získáme dvě hodnoty (výšku a váhu), tedy n korelačních dvojic ($\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{y}_i$). Pak vypočteme aritmetické průměry z hodnot $\boldsymbol{y}_i$ odpovídajících téže hodnotě $\boldsymbol{x}_i$ a tyto průměry propojíme křivkou, kterou nazýváme empirická. (Obr. 9.7).

Obr. 9. 7 Empirická křivka pro korelační vztah



2) Sestrojení **teoretické přímky**, tj. přímky, proložené bodovým diagramem tak, že se co nejvíce blíží všem bodům – představuje tedy nejbližší regresní funkci. Tato lineární regresní funkce je pak používána pro popis skutečné závislosti sledovaných veličin na úrovni celého *základního souboru*.

Pro určení nejvhodnější lineární regresní funkce je nutno vypočítat odhady regresních koeficientů *k* a *q* dané rovnice pro teoretickou přímku:

$$y = kx + q$$

Koeficienty *k* a *q* určují svojí hodnotou vlastnosti dané přímky (sklon a posun):

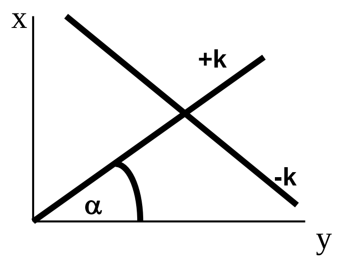
k (směrnice přímky, sklon) = tg α (úhel, který svírá přímka s osou *x*)

q (posun přímky) – určuje průsečík přímky s osou *y*

Vždy je nutno mít na paměti, že regresní koeficienty *k* a *q* vypočtené z dat výběrového souboru jsou pouze *odhadem* přesných koeficientů teoretické regresní funkce, která jednoznačně popisuje skutečnou závislost sledovaných veličin na úrovni celé populace.

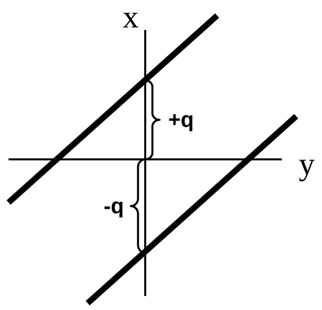
Obrázky 9. 8 a 9. 9 znázorňují vlastnosti přímky, které jsou určeny koefickienty *k* a *q* v rovnici lineární regresní funkce.

Obr. 9. 8 Regresní koeficient *k* určuje sklon přímky



Pokud má koeficient *k* kladnou hodnotu, jedná se o *přímou* lineární závislost mezi proměnnými *X* a *Y* - přímka bude v tomto případě stoupající. Pokud bude hodnota koeficientu k záporná, jedná se o *nepřímou* lineární závislost mezi proměnnými *X* a *Y* - přímka bude v tomto případě klesající.

Obr. 9. 9 Regresní koeficient *q* určuje průsečík přímky s osou *y*



V případě kladné hodnoty koeficientu *q* protíná přímka osu *y* nad počátkem souřadnicových os, v případě záporné hodnoty koeficientu *q* protíná přímka osu *y* pod počátkem souřadnicových os.

9. 2. 1 Regresní analýza

Regresní analýza představuje statistickou metodu, která je používána pro výpočet odhadů koeficientů lineární regresní funkce: $y = kx + q$. Vycházíme z datového materiálu v podobě uspořádaných dvojic číselných údajů pro proměnné *X* a *Y* - korelačních dvojic (x_i, y_i), naměřených u výběrového souboru o rozsahu *n* členů. Regresní koeficienty lineární regresní funkce odhadujeme metodou *nejmenších čtverců.* Název je odvozen z postupu, který minimalizuje sečtené čtverce vertikálních vzdáleností datových bodů v bodovém diagramu od proložené teoretické přímky.

Regresní koeficient *k* pro lineární regresní funkci vypočteme vztahem:

$$k = \frac{n \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

Regresní koeficient *q* pro lineární regresní funkci vypočteme vztahem:

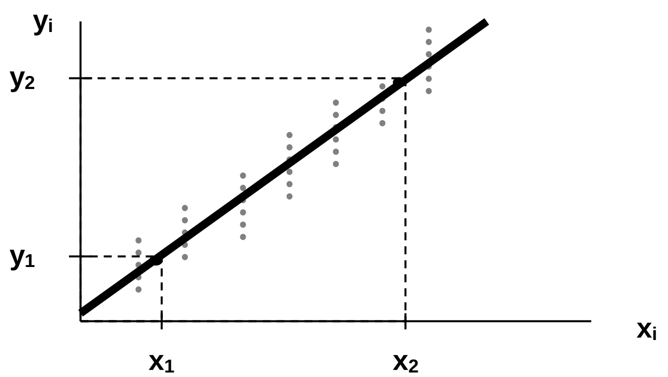
$$q = \frac{\sum y_i - k \cdot \sum x_i}{n}$$

$\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i}$ – korelační dvojice

$\boldsymbol{n}$ – počet korelačních dvojic

Po výpočtu regresních koeficientů lineární funkce, je nutno určit souřadnice dvou bodů, aby bylo možno sestrojit teoretickou regresní přímku. Zvolíme libovolnou hodnotu x_1 a vypočteme pomocí známé regresní rovnice odpovídající hodnotu závislé proměnné: $y_1 = k \cdot x_1 + q$. Podobně zvolíme libovolnou jinou hodnotu x_2 a vypočteme pomocí rovnice odpovídající hodnotu $y_2 = k \cdot x_2 + q$.

Obr. 9. 10 Sestrojení teoretické regresní přímky



9. 2. 2 Korelační analýza

Korelační analýza představuje statistickou metodu, která je používána pro zjištění **těsnosti závislosti** (síly vztahu) dvou náhodných spojitých proměnných. V nejobecnějším smyslu, slovo „korelace“ označuje míru stupně asociace dvou veličin. Říkáme, že dvě veličiny jsou korelované (asociované), jestliže určité hodnoty jedné veličiny mají tendenci se vyskytovat společně s určitými hodnotami druhé veličiny. Jde tu tedy o *dvoustranný* reciproční vztah dvou náhodných proměnných *X* a *Y*, kdy nemá smysl uvažovat, že jedna z proměnných je závislá a druhá nezávislá; obě jsou závislé vzájemně. Je to např. vzájemný vztah mezi délkou předních a zadních končetin, vztah mezi délkou křídla a délkou ocasu u ptáků nebo vztah mezi hladinou glukózy a kortikosteronu v krevním séru.

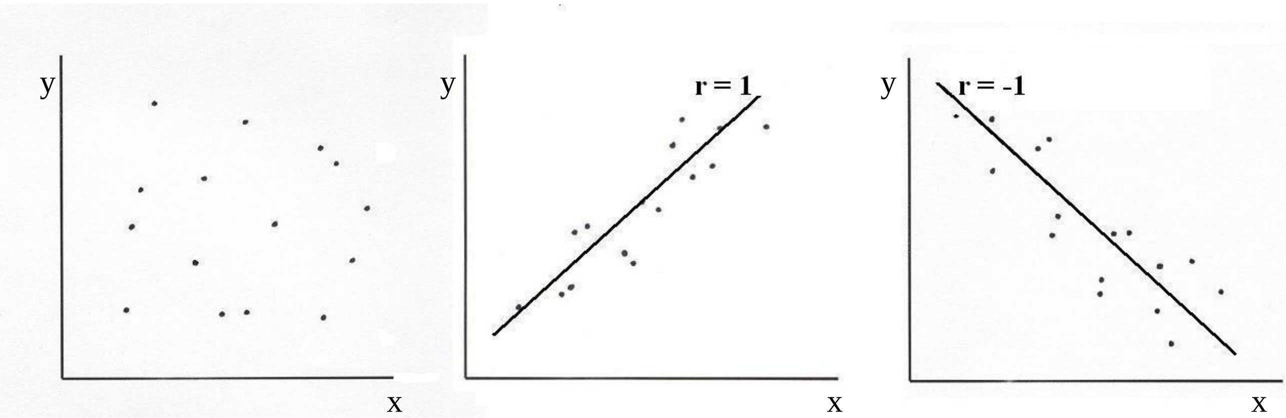
Míra asociace dvou náhodných proměnných může sahat od neexistence korelace (všechny hodnoty proměnné *Y* se vyskytují stejně pravděpodobně s každou hodnotou proměnné *X*) až po absolutní korelaci (s danou hodnotou proměnné *X*, se vyskytuje právě jedna hodnota proměnné *Y*). Pro kvantitativní vyjádření těsnosti vztahu dvou korelovaných veličin byla navržena řada koeficientů, které se liší podle typů proměnných, pro které se používají. Pro korelaci mezi dvěma *spojitými* náhodnými proměnnými *X* a *Y* je nejdůležitější a nejčastěji používanou mírou síly vztahu **Pearsonův korelační koeficient „*r*"**. Počítáme jej z „*n*" párových hodnot - korelačních dvojic (x_i, y_i) naměřených na „*n*" jedincích náhodně vybraných z populace. Protože při výpočtu využíváme odchylek jednotlivých hodnot x_i, y_i od průměrů obou veličin $\bar{x}, \bar{y}$, je někdy pro tento koeficient používán termín „*parametrický korelační koeficient*". Podmínkou použití Pearsonova korelačního koeficientu je přitom normální rozdělení obou náhodných proměnných *X* a *Y* (tzv. *dvounormální rozdělení*).

Korelační koeficient *r* pro lineární korelační závislost vypočteme vztahem:

$$r = \frac{\sum[(x_i - x).(y_i - y)]}{\sqrt{\sum(x_i - x)^2 \cdot \sum(y_i - y)^2}}$$

Korelační koeficient *r* nabývá hodnot v intervalu ⟨-1 ; +1⟩. Čím větší je absolutní hodnota *r*, tím těsnější je korelace mezi oběma proměnnými. Kladná hodnota korelačního koeficientu vyjadřuje positivní korelaci mezi veličinami, záporná hodnota korelačního koeficientu vyjadřuje negativní korelaci obou veličin. Pokud je hodnota korelačního koeficientu rovna nule, korelační závislost mezi veličinami neexistuje. Korelační koeficient *r* = +1 vyjadřuje úplnou (lineární) přímou závislost veličin (stoupající přímka), korelační koeficient r = -1 označuje úplnou (lineární) nepřímou závislost veličin (klesající přímka).

Obr. 9.11 Bodové diagramy pro korelaci s různou hodnotou "*r*"



Neexistující korelace *r* = 0 — Přímá (pozitivní) korelace *r* > 0 — Nepřímá (negativní) korelace *r* < 0

9. 2. 3 Testování významnosti korelačního koeficientu

Je třeba si uvědomit, že korelační koeficient „*r*“, který počítáme z dat korelačních dvojic naměřených u výběrového souboru představuje pouze *odhad* skutečného korelačního koeficientu označovaného jako „ρ“, který předpokládáme v celé populaci. Pokud tedy chceme přesně vědět, zda korelační vztah v populaci opravdu existuje, je nutno výběrový korelační koeficient „*r*“, jako každý výběrový parametr, testovat.

Za předpokladu, že náhodný výběr, ze kterého je korelační koeficient počítán, má dvounormální rozdělení, lze významnost korelačního koeficientu *r* testovat pomocí ***t*-testu**, kdy testujeme hypotézu nezávislosti (**H_0 : ρ = 0**).

Testovací statistiku pro *t*-test vypočteme podle vztahu:

$$t = \frac{r}{s_r}$$

kde

r = výběrový korelační koeficient

s_r = **střední chyba korelačního koeficientu,** vypočtená podle vztahu:

$$s_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$$

Vypočtené testovací kritérium ***t*** porovnáme s tabulovanou kritickou hodnotou *t* (viz Příloha: Tab. č. 3 Kvantily $t_{1-\alpha/2\ (v)}$ Studentova *t*-rozdělení) pro zvolenou hladinu významnosti α a dané **stupně volnosti v = n-2** :

Je-li $t > t_{1-\alpha/2(v)}$ => zamítáme hypotézu nezávislosti sledovaných veličin (korelační koeficient ***r* je významný** na hladině α)

Je-li $t < t_{1-\alpha/2(v)}$ => nemůžeme zamítnout hypotézu nezávislosti sledovaných veličin (korelační koeficient ***r* je nevýznamný** na hladině α).

9. 3 Nelineární korelační závislost

Výpočet nelineárních regresních rovnic bez využití výpočetní techniky (statistický software s nabídkou tzv. polynomiálních regresí) je značně namáhavý, proto se v praxi většinou převádí nelineární závislost na lineární pomocí vhodné **transformace** původních hodnot (např. logaritmováním, vhodnou substitucí ap). Jinou, poměrně často používanou možností řešení nelineárních závislostí mezi náhodnými proměnnými v biostatistice je použití výpočtu Spearmanova korelačního koeficientu.

9. 3. 1 Spearmanův koeficient pořadové korelace

Jedná se o **neparametrickou** metodu, která využívá při výpočtu **pořadí** hodnot sledovaných veličin, a kterou lze použít pro popis jakékoliv závislosti (lineární i nelineární). Spearmanův korelační koeficient, jehož teoretickou hodnotu značíme „ρ_{Sp}“, používáme pro měření síly vztahu veličin X a Y, když nemůžeme předpokládat linearitu očekávaného vztahu nebo normální rozdělení proměnných X a Y. Závislost proměnných může mít obecně vzestupný nebo sestupný charakter. Jestliže je $r_{Sp} = 1$, resp. $r_{Sp} = -1$, párové hodnoty (x_i, y_i) leží na nějaké vzestupné, resp. klesající funkci. Pro malé rozsahy n je výpočet Spearmanova korelačního koeficientu méně pracný než výpočet Pearsonova parametrického korelačního koeficientu. Proto je možno ho použít i k hodnocení lineárních závislostí; jeho použití je tu však spíše orientační (využívá méně informací z dat) a na rozdíl od parametrického koeficientu je méně účinný.

Výpočet Spearmanova korelačního koeficientu vychází z pořadových čísel proměnných x_i a y_i (korelačních dvojic) naměřených u n jedinců výběrového souboru. Jsou-li hodnoty proměnných x_i a y_i *seřazeny vzestupně do dvou řad* a každé hodnotě je přiděleno pořadí, pak koeficient pořadové korelace je dán vztahem:

$$r_{Sp.} = 1 - \frac{6\sum D_i^2}{n.(n^2 - 1)}$$

kde

$\boldsymbol{D_i}$ = rozdíl mezi pořadím hodnot x_i a y_i příslušných korelačních dvojic

$\boldsymbol{n}$ = počet korelačníchdvojic

Vypočtený koeficient porovnáme s tabelovanými kritickými hodnotami Spearmanova korelačního koeficientu pro zvolené a α dané n (viz Příloha Tabulka č. 12 Kritické hodnoty Spearmanova korelačního koeficientu r_{Sp} :

Je-li $|r_{Sp}| > r_{Sp(\alpha,\, n)}$ => koeficient pořadové korelace je **významný** na hladině α (korelace sledovaných veličin v populaci existuje)

Je-li $|r_{Sp}| < r_{Sp(\alpha,\, n)}$ => koeficient pořadové korelace je **nevýznamný** na hladině α (korelace sledovaných veličin v populaci neexistuje)

Příklad 9. *1:*

U 10 pacientů byl sledován vztah mezi pH moči (x_i) a hladinou K^+ iontů (mmol.l^{-1}) v krevním séru (y_i). Existuje závislost těchto ukazatelů? Zjištěné údaje jsou shrnuty do následující tabulky:

Pacient č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pH moči	5,92	7,00	6,90	6,05	6,80	6,10	6,00	6,50	7,20	6,12
K^+ ionty	4,0	4,8	4,9	4,2	4,8	4,9	4,0	4,3	4,5	4,7

Postup:

1. ***Seřadíme*** vzestupně hodnoty x_i a y_i *do dvou variačních řad* – tím zjistíme pořadí jednotlivých hodnot x_i a y_i. Vyskytnou-li se stejné hodnoty ve variační řadě, přidělíme každé z nich tzv. *průměrné pořadí* - např. seřazená variační řada hodnot pro hladinu K^+ iontů má první dvě hodnoty stejné (4,0 mmol.l^{-1}), tzn., že obě hodnoty dostanou pořadové číslo 1,5. , které bylo vypočteno jako průměr z pořadí 2. + 1..
2. Sestavíme ***tabulku podle pořadí*** *hodnot* x_i a y_i pro každou korelační dvojici :

Pacient č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pH moči	1.	9.	8.	3.	7.	4.	2.	6.	10.	5.
K^+ ionty	1,5.	7,5.	9,5.	3.	7,5.	9,5.	1,5.	4 .	5.	6 .

3. Sestavíme tabulku vypočtených ***rozdílů pořadí*** $\boldsymbol{D_i}$ proměnné x_i a proměnné y_i a rozdíly umocníme na druhou:

Rozdíl pořadí D_i	+0,5	-1,5	+1,5	0	+0,5	+5,5	-0,5	-2,0	-5,0	+1,0
D_i^2	0,25	2,25	2,25	0	0,25	30,25	0,25	4,00	25,0	1,0

4. Vypočteme součet mocnin rozdílů pořadí:

$$\sum D_i^{\,2} = 65{,}50$$

5. Vypočteme Spearmanův korelační koeficient r_{Sp}:

$$r_{Sp.} = 1 - \frac{6 * 65{,}50}{10 * (100 - 1)} = 0{,}603$$

6. Vypočtený koeficient porovnáme s tabulkou významnosti koeficientů pořadové korelace pro $n = 10$ a zvolenou chybu α (Příloha: Tab. č. 11 Kritické hodnoty Spearmanova korelačního koeficientu r_{Sp}):

   Kritická hodnota $r_{Sp(0,05,10)} = 0{,}564$

   $|0{,}603| > r_{Sp(0,05,10)} \Rightarrow$ korelační koeficient je statisticky významný

Závěr: Protože koeficient pořadové korelace je statisticky významný, znamená to, že byla prokázána vzájemná korelace mezi pH moči a hladinou K^+ iontů v krevním séru u sledovaných pacientů ($p < 0{,}05$).

Kapitola 10

Kvalitativní znaky

(Kategoriální data)

10. 1 Pojem pravděpodobnost

Aby bylo možno předvídat výskyt náhodné veličiny a tím řešit úlohy v praxi, je třeba vyjádřit **jistotu** (stupeň jistoty), s níž lze předpokládat, že se daná náhodná veličina vyskytne. Tato jistota, s níž lze předpokládat, že se daná náhodná veličina vyskytne se označuje pojmem **pravděpodobnost** náhodné veličiny.

Pravděpodobnost náhodné veličiny se vyjadřuje číslem, které nabývá všech hodnot v intervalu od 0 do +1, kde 0 vyjadřuje výskyt náhodné veličiny nemožný, a 1 vyjadřuje výskyt náhodné veličiny jistý. Pravděpodobnost náhodné veličiny lze určit dvojím způsobem - klasickým nebo statistickým.

1) Klasická definice pravděpodobnosti - může-li jeden proces (náhodná veličina) vykázat "n" výsledků (hodnot), které jsou stejně možné, a jestliže "m" z těchto výsledků (hodnot) jsou výsledkem (hodnotou) "A" pak pravděpodobnost výsledku (hodnoty) "A" je $P(A) = m/n$. Této klasické definice pravděpodobnosti lze užít jen pro případ, že všechny výsledky (hodnoty) daného procesu (náhodné veličiny) jsou stejně možné.

Například při narození dítěte je možný "n" = 2 počet výsledků, které jsou stejně pravděpodobné. "m" = 1 počet z těchto výsledků je výsledkem "A", tj. výsledkem kdy se narodí chlapec. Pak pravděpodobnost narození chlapce je ½ = 0,5.

Například při hodu kostkou je možný "n" = 6 počet výsledků, které jsou stejně pravděpodobné. "m" = 1 počet z těchto výsledků je výsledkem "A", tj. výsledkem kdy padne číslo 4. Pak pravděpodobnost padnutí čísla 4 při hodu kostkou je 1/6 = 0,166. Nelze však již určit pravděpodobnost padnutí čísla 4 při hodu kostkou, je-li jedna strana kostky zatížena. Pak výsledky při hodu kostkou nejsou stejně možné a nelze proto tímto způsobem určit pravděpodobnost padnutí čísla 4, protože při zatížení strany 2 je výsledek číslo 4 více možný než ostatní a nelze určit nakolik.

2) Statistická definice pravděpodobnosti - opakujeme-li "n"-krát nezávisle daný proces a nastane-li při tomto opakování výsledek (hodnota) "A" "m"-krát, pak při dostatečně velkém počtu nezávislých opakování daného procesu, je pravděpodobnost výsledku (hodnoty) "A" rovna $P(A)=lim_{n \to \infty}\ m/n$. Této klasické definice pravděpodobnosti lze užít i pro případ, že všechny výsledky (hodnoty) daného procesu (náhodné veličiny) nejsou stejně možné.

Například při narození 10 000 dětí bylo 5 204 výsledkem "A", tj. výsledkem kdy se narodí chlapec. Pak pravděpodobnost narození chlapce je 5204/10 000 = 0,5204.

Například při 1 000 hodech kostkou bylo 175 výsledkem "*A*", tj. výsledkem kdy padlo číslo 4. Pak pravděpodobnost padnutí čísla 4 při hodu kostkou je 175/1000 = 0,175. Lze však určit i pravděpodobnost padnutí čísla 4 při hodu kostkou, je-li jedna strana kostky zatížena. Při 1 000 hodech kostkou při zatížení strany s číslem 2 byl výsledek číslo 4 více možný než ostatní a číslo 4 padlo 241 krát. Pak pravděpodobnost padnutí čísla 4 při hodu kostkou je 241/1000 = 0,241.

Statistická a klasická definice pravděpodobnosti nejsou v rozporu. Určíme-li *P(A)* klasickým způsobem (je-li to možné), pak při určování *P(A)* statistickým způsobem dojdeme téměř jistě k témuž číslu nebo k číslu velmi blízkému. Rozdíl mezi oběma způsoby určování (výpočtu) pravděpodobnosti spočívá v tom, že při klasickém určování pravděpodobnosti se vychází z vlastností zkoumaného jevu (tzn. z podílu počtu výsledků možných "*n*" a počtu výsledků příznivých pro jev "*A*" "*m*", tzn. klasickou pravděpodobnost lze určit před začástkem procesu. Při statistickém určování pravděpodobnosti se vychází z výsledků skutečně proběhlých procesů, tzn. z počtu opakování procesů "*n*" a počtu nastání daného jevu "*A*" v těchto opakováních "*m*", tzn. statistickou pravděpodobnost lze určit až na základě skutečně proběhlých procesů.

Zjištěné hodnoty pro klasickou i statistickou pravděpodobnost musí být shodné (jedná se o jednu a tutéž pravděpodobnost). Nejsou-li shodné, pak je rozdíl způsoben chybou :

a) buď při určování klasické pravděpodobnosti, kdy například výsledky považované za stejně možné, stejně možné nejsou,

b) nebo při určování statistické pravděpodobnosti byl počet opakování procesů "*n*" malý (tj. "*n*" se neblížilo k nekonečnu, popřípadě jiné hodnotě konečné pro daný jev) a výsledek byl zkreslen náhodnou chybou.

Takto lze také vysvětlit rozdíl mezi klasickou pravděpodobností narození chlapce (0,5) a statistickou pravděpodobností (0,5204). Buď není stejná pravděpodobnost pro narození chlapce a děvčete, nebo je počet "*n*"= 10 000 pro určení statistické pravděpodobnosti narození chlapce malý a zvýšením například na "*n*"= 100 000 by se tato pravděpodobnost přiblížila k hodnotě 0,5.

10. 2 Kategoriální data

Jak jsme již poznali v první kapitole, pojmem kategoriální data označujeme tzv. nominální statistické znaky (**kvalitativní znaky**), u nichž nemůžeme zjistit měřitelné hodnoty, ale určujeme pouze rovnost či různost („jedinec danou kvalitu splňuje nebo ne“). Kvalitativním znakem v biostatistice může být například barva očí, typ srsti, výskyt onemocnění, provedení vakcinace, přítomnost anatomické anomálie aj.

Kvalitativní statistické znaky mohou nabývat různých možností svého projevu – tyto možnosti projevu nazýváme **kategorie** (kvalitativní třídy). Kategorie nominálních znaků reprezentují jednotlivé *varianty* kvalitativního znaku. Některé kvalitativní znaky mohou nabývat buď jen *dvou* možností svého projevu (variant) – tyto znaky nazýváme **alternativní** nominální znaky (např. stav organismu: zdravý – nemocný, pohlaví: samčí – samičí, provedení vakcinace: vakcinován – nevakcinován apod.). Jiné kvalitativní znaky mohou nabývat *více* možností svého projevu (variant) – tyto znaky nazýváme **množné** nominální znaky (např.: barva očí: modrá – hnědá – šedá – zelená, typ strti: krátkostrstý – dlouhosrstý – hrubostrstý apod.).

Při sledování výskytu kvalitativního znaku (náhodného přírodního jevu) u daného jedince ve statistickém souboru je pro každou kategorii sledovaného znaku možno interpretovat pouze 2 stavy:

- Náhodný jev nastane (s pravděpodobností ***p***)
- Náhodný jev nenastane (s pravděpodobností ***q***)

Platí přitom, že $p + q = 1$ (tyto pravděpodobnosti vyplňují celý pravděpodobnostní prostor – tzn., že nemůže nastat jiná možnost než tyto dva stavy). Pro tyto dva stavy je často používáno symbolické vyjádření pomocí 2 „hodnot“ např.: 0-1, ano-ne, *A*-*N*, pravda-nepravda, apod.

Pro kvalitativní znaky je charakteristické **binomické rozdělení** četností, které je odvozeno z výpočtu pravděpodobnosti výskytu sledovaného znaku u výběrového souboru při daném počtu jedinců v souboru (*n*). Nejčastěji se s tímto rozdělením setkáváme např. při statistických výpočtech spojených se stanovením četnosti onemocnění v různě velkých skupinách jedinců.

Pokud provádíme sledování nějakého náhodného jevu (kvalitativního znaku) u výběrového souboru o určité velikosti (***n*** členů), je možno zjistit, s jakou pravděpodobností (***P***) nastane sledovaný náhodný jev u určitého počtu (***k***) jedinců v tomto výběrovém souboru.

Např.: Pokud budeme sledovat u výběrového souboru o rozsahu $n = 10$ členů výskyt určitého onemocnění, které se vyskytuje v populaci s pravděpodobností $p = 0{,}1$, bude nás zajímat otázka, jaká je pravděpodobnost ***P***, že v tomto výběrovém souboru onemocní určitý počet ***k*** jedinců z celkového počtu ***n***? Tyto pravděpodobnosti lze přesně vypočítat pro jednotlivé hodnoty *k* podle následujícího vztahu:

$$P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k . q^{n-k}$$

kde výraz

$\binom{n}{k}$ „*n* nad *k*“ = binomický koeficient.

Hodnotu binomického koeficientu lze pro různé dvojice *n* a *k* nalézt ve statistických tabulkách nebo ho lze vypočítat podle následujícího vztahu**:**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

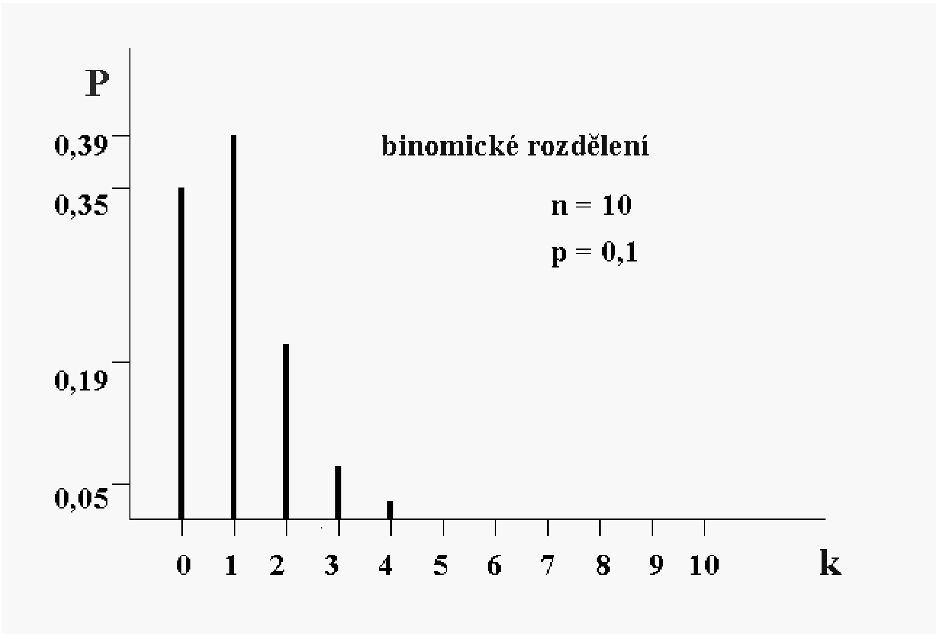
Přitom platí: $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

Pro výše uvedená data ($n = 10$, $p = 0{,}1$) dostaneme výpočtem následující pravděpodobnosti *P(k)* pro různé hodnoty $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots 10$:

k (počet nemocných)		***P(k)***
0	$\binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot q^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}347 =$	**0,347**
1	$\binom{10}{1} \cdot p^1 \cdot q^9 = 10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}387 =$	**0,387**
2	$\binom{10}{2} \cdot p^2 \cdot q^8 = 45 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}4305 =$	**0,194**
3	……	**0,057**
4	……	**0,011**
5	……	**0,001**
6	……	…..
7	……	…..
8	……	…..
9	$\binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot q^1 = 10 \cdot 0{,}000000001 \cdot 0{,}9 =$	**$0{,}0^8 9$**
10	$\binom{10}{10} \cdot p^{10} \cdot q^0 = 1 \cdot 0{,}0000000001 =$	**$0{,}0^9 1$**

Vypočtené pravděpodobnosti ***P(k)*** je možno prezentovat grafickým vyjádřením, které představuje **binomické rozdělení** (viz obr. 10. 1). Jeho tvar je vždy specifický pro konkrétní výběrový soubor, na kterém bylo provedeno sledování a závisí na počtu členů tohoto výběrového souboru (***n***) a pravděpodobnosti (***p***) výskytu sledovaného náhodného jevu v celé populaci, z které byl vybrán výběrový soubor.

Obr. č. 10. 1 Příklad grafického vyjádření binomického rozdělení

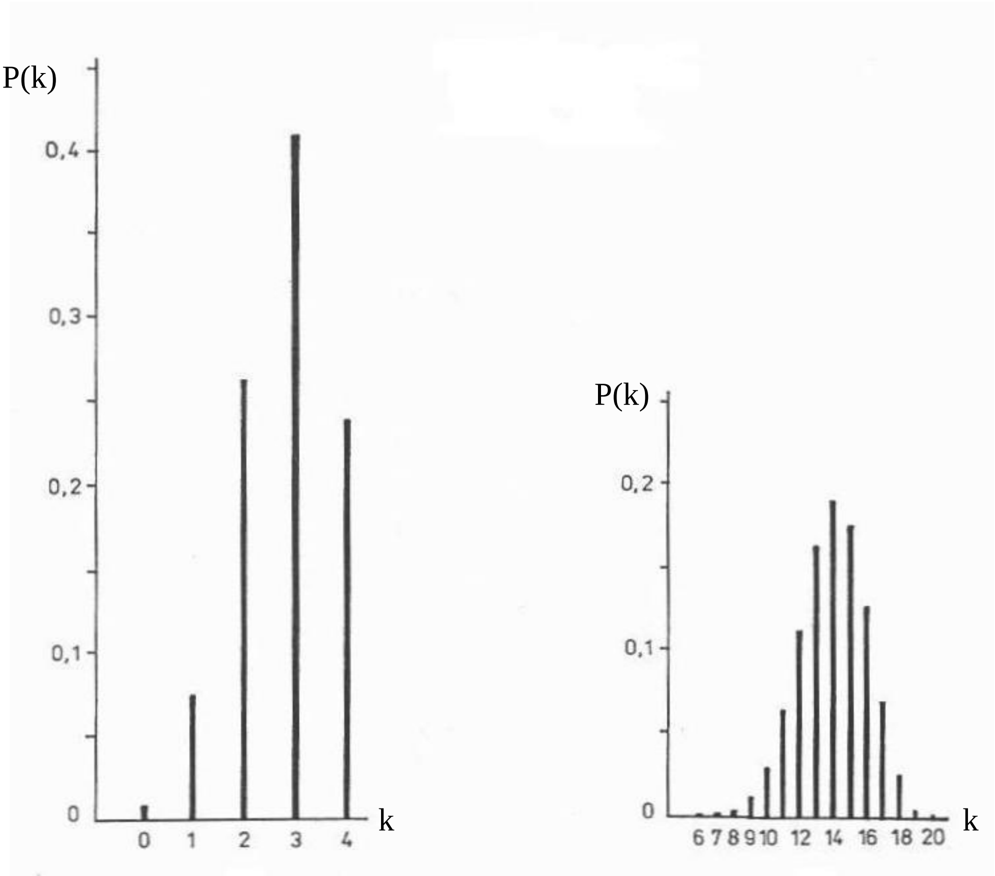


Při malém počtu členů výběrového souboru (***n***) je při dané pravděpodobnosti ***p*** pro výskyt sledovaného náhodného jevu v populaci tvar binomického rozdělení asymetrický a výsledné pravděpodobnosti ***P(k)*** pro jednotlivé varianty ***k*** (počet jedinců odpovídající sledovanému jevu) v tomto výběru jsou relativně vysoké (jejich součet je vždy roven 1).

Naopak při zvětšování počtu členů výběrového souboru a stejné pravděpodobnosti *p* pro výskyt sledovaného náhodného jevu v populaci, nabývá binomické rozdělení větší symetrie („normalizace dat“) a výsledné pravděpodobnosti *P(k)* pro jednotlivé varianty *k* ve výběrovém souboru jsou relativně nízké (celkový součet 1 je zde získán součtem mnoha dílčích pravděpodobností *P(k),* z nichž každá má relativně nízkou hodnotu).

Příklady dvou různých tvarů binomického rozdělení pro různě velké výběrové soubory (n = 4 a $n = 20$) a stejnou pravděpodobnost výskytu sledovaného náhodného jevu v populaci $p = 0{,}7$ jsou uvedeny na obrázku 10. 2. Při srovnání obou binomických rozdělení na obrázku *a*) a *b*) je možno vysledovat zákonitosti chování binomického rozdělení popsané v předchozím odstavci: při zvětšujícím se rozsahu výběrového souboru *n* dochází k tzv. „normalizaci dat“, kdy se binomické rozdělení svým tvarem přibližuje Gausovu normálnímu rozdělení. Toho je možno využívat i při výpočtech v oblasti statistiky kvalitativních znaků, kdy lze v některých případech (při vysokých počtech *n*) aproximovat binomické rozdělení normálním rozdělením.

Obr. č. 10. 2 Srovnání binomického rozdělení pro různě velké výběry (a, b)



a) ***n* = 4**
***p* = 0,7**

b) ***n* = 20**
***p* = 0,7**

10. 3 Analýza kategoriálních dat

Při výpočtech spojených se sledováním kvalitativních statistických znaků vycházíme z pravděpodobnosti výskytu daného znaku v populaci a z **četností** jedinců odpovídajících jednotlivým kategoriím (kvalitativním třídám) sledovaného nominálního znaku ve výběrových souborech. Získaná kategoriální data zachycujeme pomocí jedno-, dvou- nebo vícerozměrných tabulek četností (případně relativních četností, procent). Každý rozměr (dimenze) tabulky odpovídá klasifikaci do kategorií podle určitého kvalitativního znaku.

Při zkoumání četností kategoriálních dat stojíme před podobnými úkoly jako v případě dat metrických. Můžeme porovnávat četnosti výskytu sledovaného kvalitativního znaku ve výběrovém souboru, se statistickou pravděpodobností výskytu tohoto znaku, která je teoreticky známá pro celou populaci. Můžeme také porovnávat četnosti výskytu sledovaného znaku mezi dvěma, případně i více výběrovými soubory nebo zjišťovat sílu závislosti jednotlivých kvalitativních znaků mezi sebou.

Základním statistickým postupem, který je nejčastěji využíván při analýze kategoriálních dat je χ^2-test (Chí kvadrát test) pro testování rozdílů četností (jak mezi soubory, tak i pro zjišťování závislosti kvalitativních znaků).

Při výpočtech spojených s analýzou kategoriálních dat pomocí χ^2-testu pracujeme s následujícím označením četností:

$\boldsymbol{n_e}$ - empirická (pozorovaná) četnost výskytu znaku (platí pro výběrový soubor)

$\boldsymbol{n_o}$ - očekávaná (teoretická) četnost výskytu znaku (platí pro populaci)

Poměr empirické četnosti výskytu znaku ve výběrovém souboru k celkovému počtu jedinců ve výběru představuje **relativní četnost** znaku (**empirickou pravděpodobnost** výskytu daného znaku - $\boldsymbol{p_e}$):

$$p_e = \frac{n_e}{n}$$

Při nekonečném zvětšování rozsahu výběrového souboru $\boldsymbol{n}$ dostaneme v limitě tzv. **statistickou (teoretickou) pravděpodobnost** výskytu znaku - $\boldsymbol{p_o}$ (očekávanou pravděpodobnost, předpokládanou pro celý základní soubor). Pro nekonečně velký počet jedinců v populaci ($N = \infty$) nelze statistickou pravděpodobnost prakticky vypočítat, můžeme ji pouze odhadovat na základě empirické pravděpodobnosti. Čím větší je počet jedinců ve výběrovém souboru, na kterém provádíme sledování, tím více se hodnota empirické pravděpodobnosti (p_e) blíží k skutečné hodnotě teoretické pravděpodobnosti (p_o):

$$p_o = \frac{n_o}{N}$$

Testování rozdílů četností se (obecně) provádí χ^2-testem. Rozdíl mezi empirickými (pozorovanými) a teoretickými (očekávanými) četnostmi zachycuje testovací statistika, která má tvar:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_{ei} - n_{oi}\right)^2}{n_{oi}}$$

kde

m = počet kvalitativních **tříd** (kategorií) představujících varianty kvalitativního znaku

n_{ei} = empirická četnost (data z výběrového souboru)

n_{oi} = očekávaná četnost (teoretická, známá pro základní soubor)

Protože platí, že $n_e = p_e \,.\, n$ a $n_o = p_o \,.\, n$, lze použít (v některých situacích je pro výpočty výhodnější) i výraz :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_{ei}^{\,2}}{n_{oi}} - n$$

Je-li vypočtená statistika $\boldsymbol{\chi^2} = \mathbf{0}$, znamená to, že pozorované a teoretické četnosti jsou **přesně stejné**. Čím větší je hodnota χ^2, tím větší je nesouhlas mezi empirickou (n_e) a teoretickou (n_o) četností v jednotlivých třídách.

Pro posouzení statistické významnosti rozdílu srovnávaných četností porovnáme vypočtený χ^2 s tabulkovou **kritickou hodnotou** $\boldsymbol{\chi^2_{1-\alpha\,(\nu)}}$. Jako kritické hodnoty pro χ^2–test slouží 1-α kvantily χ^2 - rozdělení při $\boldsymbol{\nu = m\text{-}1}$ **stupních volnosti** (viz Příloha: Tab. č. 4a Kritické hodnoty rozdělení χ^2).

Pokud vypočtená statistika (testovací kritérium) χ^2 přesáhne tabulkovou kritickou hodnotu $\chi^2_{1-\alpha\,(\nu)}$, prohlásíme, že pozorované četnosti n_{ei} *nesouhlasí statisticky významně* s teoreticky očekávanými četnostmi n_{oi} na hladině významnosti α.

10. 3. 1 Test rozdílu empirické a teoretické četnosti

Tímto testem porovnáváme experimentálně získané (empirické) četnosti sledovaného kvalitativního znaku pozorované ve výběrovém souboru o rozsahu n jedinců s teoretickou (statistickou) četností, kterou známe např. z literatury nebo z dlouhodobých pozorování.

Test rozdílu empirické a teoretické četnosti se nejčastěji používá při srovnávání výskytu nějakého náhodného jevu – kvalitativního znaku (např. výskyt onemocnění) ve sledovaném výběrovém souboru vzhledem k výskytu tohoto náhodného jevu v celé populaci. Jiným příkladem je použití v genetice při výpočtech spojených s porovnáváním empirických četností pozorovaných v genetických pokusech s očekávanými četnostmi teoreticky známými (štěpné poměry dle Mendela).

Příklad 10. 1:

V chovu 146 telat bylo ve 13 případech zjištěno onemocnení enteritidou. V celé populaci je výskyt tohoto onemocnění u telat podle dlouhodobých sledování 4,5% . Liší se výskyt enteritidy ve sledovaném chovu vzhledem k celé populaci?

Postup:

U výběrového i základního souboru můžeme rozlišit 2 kategorie (třídy):

- Nemocná zvířata
- Zdravá zvířata

1) Z dat pro výběrový soubor (n = 146, enteritis: 13 x) a pro populaci (p_o= 4,5% = 0,045) sestavíme tabulku četností pro obě kategorie:

Třídy:	**Nemocný**	**Zdravý**
Empirické četnosti (n_e) :	**13**	**133**
Očekávané četnosti:	**6,57**	**139,43**
(výpočet: $\boldsymbol{n_o} = \boldsymbol{p_o} . \boldsymbol{n}$)	**(**0,045.146=6,57)	**(**0,955.146=139,43) resp. **(**146-6,57=139,43)

2) Vypočteme testovací kritérium:

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_{ei} - n_{oi})^2}{n_{oi}} = \frac{(13-6{,}57)^2}{6{,}57} + \frac{(133-139{,}43)^2}{139{,}43} = 6{,}5895$$

3) Stanovíme stupně volnosti: v = m-1 = 1

4) Zvolíme hladinu významnosti α a vyhledáme v tabulkách kritickou hodnotu odpovídající této hladině významnosti a danému stupni volnosti: $\chi^2_{0,95(1)} = 3{,}84$

5) Porovnáme vypočítané testovací kritérium χ^2 s tabulkovou kritickou hodnotou (viz Příloha: Tab. č. 4a Kritické hodnoty rozdělení χ^2):

Vypočítaný $\chi^2 > \chi^2_{0,95(1)}$ => rozdíl mezi empirickou a teoretickou četností je statisticky významný na hladině významnosti 0,05

6) *Závěr:* Pozorovaná četnost výskytu onemocnění ve sledované stáji se statisticky významně ($p < 0{,}05$) liší vzhledem k celé populaci (výskyt enteritidy je ve sledované stáji vyšší).

Příklad 10. 2:

V pokusech s křížením rostlin hrachu byly sledovány barva a tvar semene. V experimentu se vyštěpily 4 kvalitativní třídy:

kulatá žlutá semena:	315	
kulatá zelená semena:	108	(***n_{ei}***)
hranatá žlutá semena:	101	
hranatá zelená semena:	<u>32</u>	
	n = 556	

Z předpokladu genetické nezávislosti barvy a tvaru semene a dominance kulatosti respektive žluté barvy (podle Mendelových zákonů) vyplývá, že by štěpný poměr měl být 9:3:3:1. Odpovídá náš pokus Mendelovým zákonům?

Postup:

1) Ze štěpného poměru odvodíme očekávané pravděpodobnosti p_{oi} pro výskyt potomků (semen) v jednotlivých třídách:

9/16 : 3/16 : 3/16 : 1/16

2) Vypočítáme očekávané četnosti v jednotlivých třídách ($n_{oi} = p_{oi} \cdot n$) :

n_{O1}: 9/16.556= 312.75 n_{O3}: 3/16.556= 104.25

n_{O2}: 3/16.556= 104.25 n_{O4}: 1/16.556= 34.75

3) Vypočítáme testovací kritérium:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{n_{ei}^{\ 2}}{n_{oi}} - n = \frac{315^2}{312,75} + \frac{108^2}{104,25} + \frac{101^2}{104,25} + \frac{32^2}{34,25} - 556 = 0,47$$

3) Stanovíme stupně volnosti: v = m-1 = 3

4) Zvolíme hladinu významnosti α a vyhledáme v tabulkách kritickou hodnotu odpovídající této hladině významnosti a danému stupni volnosti: $\chi^2_{0,95(3)}$= 7.81

5) Porovnáme vypočítané testovací kritérium χ^2 s tabulkovou kritickou hodnotou (viz Příloha: Tab. č. 4a Kritické hodnoty rozdělení χ^2):

Vypočítaný $\chi^2 < \chi^2_{0,95(3)}$ => rozdíly v četnostech v jednotlivých třídách ***nejsou statisticky významné.***

6) *Závěr*: Pozorované četnosti v našem experimentu odpovídají teoretickému předpokladu podle Mendelových zákonů ($p > 0,05$).

10. 3. 2 Test rozdílu 2 (a více) empirických četností

Ne vždy testujeme empirické četnosti proti teoreticky očekávaným četnostem podle nějaké teorie. Častěji potřebujeme porovnat 2 i více skupin empirických četností mezi sebou a rozhodnout, zda se skupiny ve svých četnostech liší.

V testu tedy pracujeme se **skupinami** četností (nejméně dvě, ale i více), a přitom každá skupina má několik (nejméně dvě, ale i více) kvalitativních **tříd.** Na rozdíl od předchozího případu (test rozdílu empirické a teoretické četnosti**)**, kdy jsme měli k dispozici pouze jednu skupinu s několika kvalitativními třídami a testovali jsme četnosti uvnitř této skupiny proti teoreticky známým četnostem, nyní testujeme četnosti mezi více skupinami navzájem. Skupiny reprezentují náhodné výběrové soubory, které porovnáváme mezi sebou, obdobně, jako tomu bylo při porovnávání souborů kvantitativních dat.

Data (zjištěné pozorované četnosti) pro testování rozdílu empirických četností uspořádáme do **tabulek četností**, v nichž každý řádek a sloupec odpovídá klasifikaci do kategorií podle určitého kvalitativního znaku (resp. skupinám a třídám). Testování rozdílu empirických četností pak provádíme vzhledem k vlastním součtům v tabulce.

V tabulce četností označíme:

k – počet řádků (skupin) a četnosti ve skupinách n_i

m – počet sloupců (tříd) a četnosti ve třídách n_j

Při uspořádání četností v tabulce používáme pro označení četností (empirických i očekávaných) v jednotlivých buňkách tabulky symbol n_{ij}, kde indexy i, j přiřazují danou četnost k odpovídajícímu řádku (skupině) a sloupci (třídě) v tabulce. Pro každou buňku tabulky (pozorovanou empirickou četnost n_{eij}) vypočítáme odpovídající očekávanou četnost n_{oij} (nutnou pro χ^2 test) pomocí součtů empirických četností v řádcích a sloupcích tabulky (viz příklad 10. 3).

Po výpočtu testovacího kritéria χ^2 známý způsobem, porovnáme vypočtený χ^2 s tabulkovou **kritickou hodnotou** $\boldsymbol{\chi^2_{1-\alpha\ (\nu)}}$, abychom posoudili statistickou významnost rozdílu srovnávaných četností. Jako kritické hodnoty pro χ^2–test slouží 1-α kvantily χ^2 - rozdělení při $\boldsymbol{\nu = (k\text{-}1)\ .\ (m\text{-}1)}$ **stupních volnosti** (viz Příloha: Tab. č. 4a Kritické hodnoty rozdělení χ^2).

Pokud vypočtená statistika (testovací kritérium) χ^2 přesáhne tabulkovou kritickou hodnotu $\chi^2_{1-\alpha\ (\nu)}$, prohlásíme, že empirické četnosti pozorované v jednotlivých skupinách se *statisticky významně liší* na hladině významnosti α.

Příklad 10. 3:

Byly sledovány počty mrtvě a živě narozených selat ve 3 chovech (A,B,C) v kraji. Liší se mortalita selat v chovech A, B a C? Zjištěné výsledky výskytu živě a mrtvě narozených selat v jednotlivých chovech jsou shrnuty v následující tabulce:

3 skupiny (A,B,C) – obecně ***k***, (***i***)

2 třídy (živé,mrtvé) - obecně ***m***, (***j***)

k \ ***m***	**Živé**	**Mrtvé**
A	**96**	**25**
B	**121**	**22**
C	**89**	**16**

Do tabulky jsou zapsány pozorované **empirické četnosti** ($\boldsymbol{n_{oij}}$)

Pro každou buňku tabulky (empirickou četnost n_{eij}) musíme vypočítat odpovídající očekávanou četnost n_{oij} ze **součtů řádků s sloupců** v tabulce:

k \ ***m***	**Živé**	**Mrtvé**	**Skup. Σ (s_i)**
A	**96** **(100,34)**	**25** **(20,66)**	121
B	**121** **(118,59)**	**22** **(24,41)**	143
C	**89** **(87,07)**	**16** **(17,93)**	105
Tř. Σ (t_j)	306	63	369 (n)

Teoretické četnosti (n_{oij}) pro každé políčko tabulky vypočítáme podle vzorce:

$$n_{oij} = \frac{s_i \, . \, t_j}{n}$$

kde:
n = celkový počet jedinců ve sledovaném výběru (kontingenční tabulce)
s_i = součet empirických četností v řádku i
t_j = součet empirických četností ve sloupci j

(Např. pro buňku v 1. ř. a 1. sl.: $n_{o11} = \frac{121 \, . \, 306}{369} = 100{,}34$)

Vypočítáme **testovací charakteristiku** χ^2**:**

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{n_{ei}^{\;2}}{n_{oi}} - n = \frac{96^2}{100{,}34} + \frac{25^2}{20{,}66} + \frac{121^2}{118{,}59} + \frac{22^2}{24{,}41} + \frac{89^2}{87{,}07} + \frac{16^2}{17{,}93} - 369 = 1{,}637$$

Stanovíme **počet stupňů volnosti:** $\boldsymbol{\nu}$ **= (k-1).(m-1) = 2**

Vyhledáme tabulkovou kritickou hodnotou pro zvolenou hladinu významnosti α a stanovené stupně volnosti (viz Příloha: Tab. č. 4a Kritické hodnoty rozdělení χ^2):

$\chi^2_{0,95(2)} = 5{,}99$

Porovnáme vypočtený χ^2 s tabulkovou kritickou hodnotou:

$\chi^2 < \chi^2_{0,95(2)}$ => mezi sledovanými četnostmi ***není statisticky významný*** rozdíl

Závěr: Počet mrtvě a živě narozených selat se mezi sledovanými chovy A, B a C statisticky významně ***neliší*** ($p > 0{,}05$).

10. 3. 3 Testování závislosti kvalitativních znaků (kontingenční tabulky)

Závislost (nezávislost) 2 a více kvalitativních znaků zjišťujeme opět statistickou analýzou četnostních tabulek a testujeme pomocí χ^2-testu. Výpočet vychází z empirických a teoretických četností současného výskytu sledovaných znaků v souboru. Pozorované empirické četnosti sestavíme do tzv. kontingenční tabulky (kontingence = souvislost), jejíž velikost se řídí počtem sledovaných znaků:

- **tabulka 2 x 2** - nejjednodušší případ, při sledování závislost mezi 2 kvalitativními znaky (obecně jevy A a B)
- **tabulka *k* x *m*** - při sledování závislost mezi skupinou znaků (jevů) A_1-A_k a skupinou jevů B_1-B_m

Testujeme přitom **hypotézu nezávislosti** H_0: četnosti ve skupinách (četnosti jedné kvalitativní proměnné - řádky) jsou nezávislé na četnostech ve třídách (četnostech druhé kvalitativní proměnné - sloupce). Hypotézu testujeme pomocí χ^2 test a vypočtené testovací kritérium χ^2 porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou $\chi^2_{1-\alpha,\nu}$ (viz Příloha: Tab. č. 4a Kritické hodnoty rozdělení χ^2), kdy stupně volnosti stanovíme jako $\boldsymbol{\nu = (k-1) \, . \, (m-1)}$ **:**

Je-li $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha\,(\nu)} \Rightarrow$ mezi sledovanými jevy existuje statisticky **významná závislost**
Je-li $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha\,(\nu)} \Rightarrow$ závislost mezi sledovanými jevy **není** statisticky **významná**

10. 3. 3. 1 Kontingenční tabulka 2 x 2

Kontingenční tabulka 2 x 2 je speciálním případem obecné kontingenční tabulky četností *k* x *m*, kdy sledujeme závislost pouze 2 kvalitativních proměnných, kdy každá má pouze 2 kategorie, takže vzniká nejjednodušší typ tabulky četností, která má pouze 2 řádky a 2 sloupce.

Kontingenční tabulkou 2 x 2 můžeme zjišťovat např., zda spolu souvisí aplikace vakcíny a přežívání myší v pokuse po experimentální nákaze (tzn. je vakcína účinná?) Testujeme nulovou hypotézu H_0 : jevy (vakcinace a přežití) spolu nesouvisí.

Postup:

1.jev - aplikace vakcíny (*A*-ano, *A´* -ne)

2.jev - přežití v pokuse (*B*-ano, *B´* -ne)

	B	*B´*	**celkem**
A	***a***	***b***	*a* + *b*
A´	***c***	***d***	*c* + *d*
celkem	*a* + *c*	*b* + *d*	*n*= *a* + *b* + *c* + *d*

a - počet myší splňujících *A* a *B* (vakcinovány a přežily)
b - počet myší splňujících *A* a *B´* (vakcinovány a nepřežily)
c - počet myší splňujících *A´* a *B* (nevakcinovány a přežily)
d - počet myší splňujících *A´* a *B´* (nevakcinovány a nepřežily)
(empirické četnosti)
n - celkový počet myší v pokuse

Testovací kritérium: $$\chi^2 = \frac{n.(a.d - b.c)^2}{(a+b).(c+d).(a+c).(b+d)}$$

Stupně volnosti: $\nu = (k-1).(m-1) = 1$

Porovnáme vypočítanou **testovací charakteristiku** χ^2 s tabulkovou kritickou hodnotou (viz Příloha: Tab. č. 4a Kritické hodnoty rozdělení χ^2)**:**

Je-li $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha\,(\nu)}$ => **zamítáme** hypotézu **nezávislosti** jevů *A* a *B* (znamená to tedy, že vakcinace myší významně ovlivňuje přežívání myší v pokusu)

Je-li $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha\,(\nu)}$ => nemůžeme zamítnout nulovou hypotézu o nezávislosti (znamená to tedy, že vakcinace nesouvisí s přežíváním myší v pokusu)

Příklad 10. 4:

V experimentu byla zjišťována účinnost nového antiparazitárního preparátu. U výběrového souboru 50 psů byl preparát aplikován 25 jedincům, zbývajících 25 jedinců preparát nedostalo. Zjištěné výskyty parazitárního napadení u pokusných jedinců jsou shrnuty v následující tabulce:

	Aplikace prep.	*Bez aplikace prep.*	*Součet*
Pozitivní	**15**	**9**	**24**
Negativní	**10**	**16**	**26**
Součet	**25**	**25**	**50**

Testovací kritérium : $\chi^2 = \dfrac{n.(15.16 - 9.10)^2}{(15+9).(10+16).(15+10).(9+16)} = 2{,}885$

Stupně volnosti: $\nu = 1$

Kritická hodnota $\chi^2_{0,95\,(1)} = 3{,}84$ (viz Příl.: Tab. č. 4a Kritické hodnoty rozdělení χ^2)

$\chi^2 < \chi^2_{0,95\,(1)} \Rightarrow$ nemůžeme zamítnout H_0 , tzn., že četnosti v řádcích jsou nezávislé na četnostech ve sloupcích (p >0.05).

Závěr:

Aplikace testovaného antiparazitárního preparátu nesouvisí s výskytem parazitárního napadení u psů (preparát není účinný).

10. 3. 3. 2 Kontingenční tabulka *k* x *m*

Kontingenční tabulkou *k* x *m* testujeme hypotézu nezávislosti 2 skupin náhodných kvalitativních jevů: skupiny jevů A_1-A_k a skupiny jevů B_1-B_m.

Při celkovém počtu ***n*** jedinců v souboru**,** označíme obecně $\boldsymbol{n_{eij}}$ ***pozorované (empirické)*** četnosti společného výskytu jevů A_i a B_j a četnosti sestavíme do tabulky ***k*** x ***m*** :

	B_1	B_j	B_m	Σ
A_1	$\mathbf{n}_{e11}$	$\mathbf{n}_{e1j}$	$\mathbf{n}_{e1m}$	$\mathbf{a}_1$
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
A_i	$\mathbf{n}_{ei1}$	$\mathbf{n_{eij}}$	$\mathbf{n}_{eim}$	$\mathbf{a}_i$
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
A_k	$\mathbf{n}_{ek1}$	$\mathbf{n}_{ekj}$	$\mathbf{n}_{ekm}$	$\mathbf{a}_k$
Σ	$\mathbf{b}_1$	$\mathbf{b}_j$	$\mathbf{b}_m$	$\mathbf{n}$

kde $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{b_j}$ = součty četností v příslušných řádcích a sloupcích

Postup používaný pro analýzu kontingenční tabulky k x m je v principu shodný s postupem řešení tabulek četností, který jsme poznali v souvislosti s testováním rozdílu empirických četností (Viz kap. 10. 3. 2 Test rozdílu 2 (a více) empirických četností). Prostřednictvím testování rozdílů mezi empirickými a teoretickými četnostmi v kontingenční tabulce k x m testujeme pomocí χ^2 – testu nulovou hypotézu nezávislosti dvou kvalitativních proměnných (skupin jevů). Může jít například o zjišťování souvislosti mezi výskytem krevních skupin a některých chorob u lidí, souvislosti mezi ročním obdobím a výskytem určitých parazitóz u volně žijící zvěře či souvislost mezi různými krmnými dietami a výskytem alimentárních potíží u skotu aj.

Příklad následující kontingenční tabulky k x m, která schematicky zobrazuje pozorované empirické četnosti n_{eij}, bychom např. použili pro řešení situace, kdy nás zajímá otázka, zda výskyt určitých onemocnění (Nemoc č.1 a č.2) je spojen s výskytem určitého plemene skotu (Plemeno A, B, C). Testujeme tedy nulovou hypotézu nezávislosti 2 skupin kvalitativních jevů (proměnných A_i a B_j):

Proměnná A_i – Plemeno skotu (A, B, C)

Proměnná B_j – Onemocnění (Nemoc č.1, č.2)

m / ***k***	**Nemoc č.1**	**Nemoc č.2**
A	n_{e11}	n_{e12}
B	n_{e21}	n_{e22}
C	n_{e31}	n_{e32}

Postup pro řešení této kontingenční tabulky je prakticky shodný s postupem, který je uveden v *Příkladu 10.3.*

Postup:

Pro každou empirickou četnost n_{eij} nejprve vypočteme odpovídající **teoretickou četnost n_{oij},** očekávanou v případě nezávislosti jevů A_{1-k} a B_{1-m} ze součtů empirických četností v řádcích (označeny a_i) a sloupcích (označeny b_j) tabulky následujícím postupem:

$$n_{oij} = \frac{a_i . b_j}{n}$$

kde n označuje celkový součet empirických četností v tabulce

Stanovíme **stupně volnosti $\nu = (k-1).(m-1)$** a zvolíme **hladinu významnosti α**.

Vypočteme **testovací kritérium:** $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_{ei} - n_{oi}\right)^2}{n_{oi}}$$

Pokud je vypočítaná hodnota testovacího kritéria χ^2 nízká, svědčí to o nezávislosti testovaných kvalitativních proměnných. Naopak, vyšší hodnota vypočteného testovacího kritéria χ^2 indikuje určitou souvislost mezi oběma skupinami sledovaných kvalitativních jevů.

Pro zjištění statistické významnosti zjištěné závislosti **porovnáme** vypočítanou testovací charakteristiku χ^2 **s tabulkovou kritickou hodnotou $\chi^2_{\alpha(\nu)}$** (viz Příloha: Tab. č. 4a Kritické hodnoty rozdělení χ^2):

Je-li $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha\,(\nu)}$ => zamítáme hypotézu nezávislosti skupin jevů A_i a B_j.

Je-li $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha\,(\nu)}$ => nemůžeme zamítnout hypotézu nezávislosti obou skupin jevů

Příloha

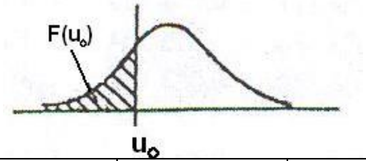
Statistické tabulky

Seznam tabulek:

Tab. č. 1 Náhodná čísla (uspořádaná do bloků pouze pro lepší přehlednost)

39 65 76 45 45	19 90 69 64 61	20 26 36 31 62	58 24 97 14 97	95 06 70 99 00
73 71 23 70 90	65 97 60 12 11	31 56 34 19 19	47 83 75 51 33	30 62 38 20 46
72 20 47 33 84	51 67 47 97 19	98 40 07 17 66	23 05 09 51 80	59 78 11 52 49
75 17 25 69 17	17 95 21 78 58	24 33 45 77 48	69 81 84 09 29	93 22 70 45 80
37 48 79 88 74	63 52 06 34 30	01 31 60 10 27	35 07 79 71 53	28 99 52 01 41
02 89 08 16 94	85 53 83 29 95	56 27 09 24 43	21 78 55 09 82	72 61 88 73 61
87 18 15 70 07	37 79 49 12 38	48 13 93 55 96	41 92 45 71 51	09 18 25 58 94
98 83 71 70 15	89 09 39 59 24	00 06 41 41 20	14 36 59 25 47	54 45 17 24 89
10 08 58 07 04	76 62 16 48 68	58 76 17 14 86	59 53 11 52 21	66 04 18 22 87
47 90 56 37 31	71 82 13 50 41	27 55 10 24 92	28 04 67 53 44	95 23 00 84 47
93 05 31 03 07	34 18 04 52 35	74 13 39 35 22	68 95 23 92 35	36 63 70 35 33
21 89 11 47 99	11 20 99 45 18	76 51 94 84 86	13 79 93 37 55	98 16 04 41 67
95 18 94 06 97	27 37 83 28 71	79 57 95 13 91	09 61 87 25 21	56 20 11 32 44
97 08 31 55 73	10 65 81 92 59	77 31 61 95 46	20 44 90 32 64	26 99 76 75 63
69 26 88 86 13	59 71 74 17 32	48 38 75 93 29	73 37 32 04 05	60 82 29 20 25
41 47 10 25 03	87 63 93 95 17	81 83 83 04 49	77 45 85 50 51	79 88 01 97 30
91 94 14 63 62	08 61 74 51 69	92 79 43 89 79	29 18 94 51 23	14 85 11 47 23
80 06 54 18 47	08 52 85 08 40	48 40 35 94 22	72 65 71 08 86	50 03 42 99 36
67 72 77 63 99	89 85 84 46 06	64 71 06 21 66	89 37 20 70 01	61 65 70 22 12
59 40 24 13 75	42 29 72 23 19	06 94 76 10 08	81 30 15 39 14	81 83 17 16 33
63 62 06 34 41	79 53 36 02 95	94 61 09 43 62	20 21 14 68 86	94 95 48 46 45
78 47 23 53 90	79 93 96 38 63	34 85 52 05 09	85 43 01 72 73	14 93 87 81 40
87 68 62 15 43	97 48 72 66 48	53 16 71 13 81	59 97 50 99 52	24 62 20 42 31
47 60 92 10 77	26 97 05 73 51	88 46 38 03 58	72 68 49 29 31	75 70 16 08 24
56 88 87 59 41	06 87 37 78 48	65 88 69 58 39	88 02 84 27 83	85 81 56 39 38
22 17 68 65 84	87 02 22 57 51	68 69 80 95 44	11 29 01 95 80	49 34 35 86 47
19 36 27 59 46	39 77 32 77 09	79 57 92 36 59	89 74 39 82 15	08 58 94 34 74
16 77 23 02 77	28 06 24 25 93	22 45 44 84 11	87 80 61 65 31	09 71 91 74 25
78 43 76 71 61	97 67 63 99 61	80 45 67 93 82	59 73 19 85 23	53 33 65 97 21
03 28 28 26 08	69 30 16 09 05	53 58 47 70 93	66 56 45 65 79	45 56 20 19 47
04 31 17 21 56	33 73 99 19 87	26 72 39 27 67	53 77 57 68 93	60 61 97 22 61
61 06 98 03 91	87 14 77 43 96	43 00 65 98 50	45 60 33 01 07	98 99 46 50 47
23 68 35 26 00	99 53 93 61 28	52 70 05 48 34	56 65 05 61 86	90 92 10 70 80
15 39 25 70 99	93 86 52 77 65	15 33 59 05 28	22 87 26 07 47	86 96 98 29 06
58 71 96 30 24	18 46 23 34 27	85 13 99 24 44	49 18 09 79 49	74 16 32 23 02
93 22 53 64 39	07 10 63 76 35	87 03 04 79 88	08 13 13 85 51	55 34 57 72 69
78 76 58 54 74	92 38 70 96 92	52 06 79 79 45	82 63 18 27 44	69 66 92 19 09
61 81 31 96 82	00 57 25 60 59	46 72 60 18 77	55 66 12 62 11	08 99 55 64 57
42 88 07 10 05	24 98 65 63 21	47 21 61 88 32	27 80 30 21 60	10 92 35 36 12
77 94 30 05 39	28 10 99 00 27	12 73 73 99 12	49 99 57 94 82	96 88 57 17 91

Tab. č. 2 Distribuční funkce *F(u)* normovaného normálního rozdělení
(0^k v tabulce znamená *k* za sebou následujících nul a 9^k *k* za sebou následujících devítek)



u	0,00	0, 01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-0,0	0,500 0	0,496 0	0,492 0	0,488 0	0,484 0	0,480 1	0,476 1	0,472 1	0,468 1	0,464 1
-0,1	0,460 2	0,456 2	0,453 3	0,448 3	0,444 3	0,440 4	0,436 4	0,432 5	0,428 6	0,424 7
-0,2	0,420 7	0,416 8	0,412 9	0,409 0	0,405 2	0,401 3	0,397 4	0,393 6	0,389 7	0,385 9
-0,3	0,382 1	0,378 3	0,374 5	0,370 7	0,366 9	0,363 2	0,359 4	0,355 7	0,352 0	0,348 3
-0,4	0,344 6	0,340 9	0,337 2	0,333 6	0,330 0	0,326 4	0,322 8	0,319 2	0,315 6	0,312 1
-0,5	0,308 5	0,305 0	0,301 5	0,298 1	0,294 6	0,291 2	0,287 7	0,284 3	0,281 0	0,277 6
-0,6	0,274 3	0,270 9	0,267 6	0,264 3	0,261 1	0,257 8	0,254 6	0,251 4	0,248 3	0,245 1
-0,7	0,242 0	0,238 9	0,235 8	0,232 7	0,229 7	0,226 6	0,223 6	0,220 6	0,217 7	0,214 8
-0,8	0,211 9	0,209 0	0,206 1	0,203 3	0,200 5	0,197 7	0,194 9	0,192 2	0,189 4	0,186 7
-0,9	0,184 1	0,181 4	0,178 8	0,176 2	0,173 6	0,171 1	0,168 5	0,166 0	0,163 5	0,161 1
-1,0	0,158 7	0,156 2	0,153 9	0,151 5	0,149 2	0,146 9	0,144 6	0,142 3	0,140 1	0,137 9
-1,1	0,135 7	0,133 5	0,131 4	0,129 2	0,127 1	0,125 1	0,123 0	0,121 0	0,119 0	0,117 0
-1,2	0,115 1	0,113 1	0,111 2	0,109 3	0,107 5	0,105 6	0,103 8	0,102 0	0,100 3	0,098 53
-1,3	0,096 80	0,095 10	0,093 42	0,091 76	0,090 12	0,088 51	0,086 91	0,085 34	0,083 79	0,082 26
-1,4	0,080 76	0,079 27	0,077 80	0,076 36	0,074 93	0,073 53	0,072 15	0,070 78	0,069 44	0,068 11
-1,5	0,066 81	0,065 52	0,064 26	0,063 01	0,061 78	0,060 57	0,059 38	0,058 21	0,057 05	0,055 92
-1,6	0,054 80	0,053 70	0,052 62	0,051 55	0,050 50	0,049 47	0,048 46	0,047 46	0,046 48	0,045 51
-1,7	0,044 57	0,043 63	0,042 72	0,041 82	0,040 93	0,040 06	0,039 20	0,038 36	0,037 54	0,036 73
-1,8	0,035 93	0,035 15	0,034 38	0,033 62	0,032 88	0,032 16	0,031 44	0,030 74	0,030 05	0,029 38
-1,9	0,028 72	0,028 07	0,027 43	0,026 80	0,026 19	0,025 59	0,025 00	0,024 42	0,023 85	0,023 30

Tab. č. 2 Distribuční funkce *F(u)* normovaného normálního rozdělení – *1. pokračování*

u	0,00	0, 01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-2,0	0,022 75	0,022 22	0,021 69	0,021 18	0,020 68	0,020 18	0,019 70	0,019 23	0,018 76	0,018 31
-2,1	0,017 86	0,017 43	0,017 00	0,016 59	0,016 18	0,015 78	0,015 39	0,015 00	0,014 63	0,014 26
-2,2	0,013 90	0,013 55	0,013 21	0,012 87	0,012 55	0,012 22	0,011 91	0,011 60	0,011 30	0,011 01
-2,3	0,010 72	0,010 44	0,010 17	0,0^{2}9 903	0,0^{2}9 642	0,0^{2}9 387	0,0^{2}9 137	0,0^{2}8 894	0,0^{2}8 656	0,0^{2}8 424
-2,4	0,0^{2}8 198	0,0^{2}7 976	0,0^{2}7 760	0,0^{2}7 549	0,0^{2}7 344	0,0^{2}7 143	0,0^{2}6 947	0,0^{2}6 756	0,0^{2}6 569	0,0^{2}6 387
-2,5	0,0^{2}6 210	0,0^{2}6 037	0,0^{2}5 868	0,0^{2}5 703	0,0^{2}5 543	0,0^{2}5 386	0,0^{2}5 234	0,0^{2}5 085	0,0^{2}4 940	0,0^{2}4 799
-2,6	0,0^{2}4 661	0,0^{2}4 527	0,0^{2}4 396	0,0^{2}4 269	0,0^{2}4 145	0,0^{2}4 025	0,0^{2}3 907	0,0^{2}3 793	0,0^{2}3 681	0,0^{2}3 573
-2,7	0,0^{2}3 467	0,0^{2}3 364	0,0^{2}3 264	0,0^{2}3 167	0,0^{2}3 072	0,0^{2}2 980	0,0^{2}2 890	0,0^{2}2 803	0,0^{2}2 718	0,0^{2}2 635
-2,8	0,0^{2}2 555	0,0^{2}2 477	0,0^{2}2 401	0,0^{2}2 327	0,0^{2}2 256	0,0^{2}2 186	0,0^{2}2 118	0,0^{2}2 052	0,0^{2}1 988	0,0^{2}1 926
-2,9	0,0^{2}1 866	0,0^{2}1 807	0,0^{2}1 750	0,0^{2}1 695	0,0^{2}1 641	0,0^{2}1 589	0,0^{2}1 538	0,0^{2}1 489	0,0^{2}1 441	0,0^{2}1 395
-3,0	0,0^{2}1 350	0,0^{2}1 306	0,0^{2}1 264	0,0^{2}1 223	0,0^{2}1 183	0,0^{2}1 144	0,0^{2}1 107	0,0^{2}1 070	0,0^{2}1 035	0,0^{2}1 001
-3,1	0,0^{3}9 676	0,0^{3}9 354	0,0^{3}9 043	0,0^{3}8 740	0,0^{3}8 447	0,0^{3}8 164	0,0^{3}7 888	0,0^{3}7 622	0,0^{3}7 364	0,0^{3}7 114
-3,2	0,0^{3}6 871	0,0^{3}6 637	0,0^{3}6 410	0,0^{3}6 190	0,0^{3}5 976	0,0^{3}5 770	0,0^{3}5 571	0,0^{3}5 377	0,0^{3}5 190	0,0^{3}5 009
-3,3	0,0^{3}4 834	0,0^{3}4 665	0,0^{3}4 501	0,0^{3}4 342	0,0^{3}4 189	0,0^{3}4 041	0,0^{3}3 897	0,0^{3}3 758	0,0^{3}3 624	0,0^{3}3 495
-3,4	0,0^{3}3 369	0,0^{3}3 248	0,0^{3}3 131	0,0^{3}3 018	0,0^{3}2 909	0,0^{3}2 803	0,0^{3}2 701	0,0^{3}2 602	0,0^{3}2 507	0,0^{3}2 415
-3,5	0,0^{3}2 326	0,0^{3}2 241	0,0^{3}2 158	0,0^{3}2 078	0,0^{3}2 001	0,0^{3}1 926	0,0^{3}1 854	0,0^{3}1 785	0,0^{3}1 718	0,0^{3}1 653
-3,6	0,0^{3}1 591	0,0^{3}1 531	0,0^{3}1 473	0,0^{3}1 417	0,0^{3}1 363	0,0^{3}1 311	0,0^{3}1 261	0,0^{3}1 213	0,0^{3}1 166	0,0^{3}1 121
-3,7	0,0^{3}1 078	0,0^{3}1 036	0,0^{4}9 961	0,0^{4}9 574	0,0^{4}9 201	0,0^{4}8 842	0,0^{4}8 496	0,0^{4}8 162	0,0^{4}7 841	0,0^{4}7 532
-3,8	0,0^{4}7 235	0,0^{4}6 948	0,0^{4}6 673	0,0^{4}6 407	0,0^{4}6 152	0,0^{4}5 906	0,0^{4}5 669	0,0^{4}5 442	0,0^{4}5 223	0,0^{4}5 012
-3,9	0,0^{4}4 810	0,0^{4}4 615	0,0^{4}4 427	0,0^{4}4 247	0,0^{4}4 074	0,0^{4}3 908	0,0^{4}3 747	0,0^{4}3 594	0,0^{4}3 466	0,0^{4}3 304
-4,0	0,0^{4}3 167	0,0^{4}3 036	0,0^{4}2 910	0,0^{4}2 789	0,0^{4}2 673	0,0^{4}2 561	0,0^{4}2 454	0,0^{4}2 351	0,0^{4}2 252	0,0^{4}2 157
-4,1	0,0^{4}2 066	0,0^{4}1 978	0,0^{4}1 894	0,0^{4}1 814	0,0^{4}1 737	0,0^{4}1 662	0,0^{4}1 591	0,0^{4}1 523	0,0^{4}1 458	0,0^{4}1 395
-4,2	0,0^{4}1 335	0,0^{4}1 277	0,0^{4}1 222	0,0^{4}1 168	0,0^{4}1 118	0,0^{4}1 069	0,0^{4}1 022	0,0^{5}9 774	0,0^{5}9 345	0,0^{5}8 934
-4,3	0,0^{5}8 540	0,0^{5}8 163	0,0^{5}7 801	0,0^{5}7 455	0,0^{5}7 124	0,0^{5}6 806	0,0^{5}6 503	0,0^{5}6 212	0,0^{5}5 934	0,0^{5}5 668
-4,4	0,0^{5}5 413	0,0^{5}5 169	0,0^{5}4 935	0,0^{5}4 712	0,0^{5}4 498	0,0^{5}4 294	0,0^{5}4 098	0,0^{5}3 911	0,0^{5}3 732	0,0^{5}3 561
-4,5	0,0^{5}3 398	0,0^{5}3 241	0,0^{5}3 092	0,0^{5}2 949	0,0^{5}2 813	0,0^{5}2 682	0,0^{5}2 558	0,0^{5}2 439	0,0^{5}2 325	0,0^{5}2 216
-4,6	0,0^{5}2 112	0,0^{5}2 013	0,0^{5}1 919	0,0^{5}1 828	0,0^{5}1 742	0,0^{5}1 660	0,0^{5}1 581	0,0^{5}1 506	0,0^{5}1 434	0,0^{5}1 366

Tab. č. 2 Distribuční funkce *F(u)* normovaného normálního rozdělení – *2. pokračování*

u	0,00	0, 01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-4,7	0,0^{5}1 301	0,0^{5}1 239	0,0^{5}1 179	0,0^{5}1 123	0,0^{5}1 069	0,0^{5}1 017	0,0^{6}9 680	0,0^{6}9 211	0,0^{6}8 765	0,0^{6}8 339
-4,8	0,0^{6} 7 933	0,0^{6}7 547	0,0^{6}7 178	0,0^{6}6 827	0,0^{6}6 492	0,0^{6}6 173	0,0^{6}5 869	0,0^{6}5 580	0,0^{6}5 304	0,0^{6}5 042
-4,9	0,0^{6} 4 792	0,0^{6}4 554	0,0^{6}4 327	0,0^{6}4 111	0,0^{6}3 906	0,0^{6}3 711	0,0^{6}3 525	0,0^{6}3 348	0,0^{6}3 179	0,0^{6}3 019
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 3	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 47
1,3	0,903 20	0,904 90	0,906 58	0,908 24	0,909 88	0,911 49	0,913 09	0,914 66	0,916 21	0,917 74
1,4	0,919 24	0,920 73	0,922 20	0,923 64	0,925 07	0,926 47	0,927 85	0,929 22	0,930 56	0,931 89
1,5	0,933 19	0,934 48	0,935 74	0,936 99	0,938 22	0,939 43	0,940 62	0,941 79	0,942 95	0,944 08
1,6	0,945 20	0,946 30	0,947 38	0,948 45	0,949 50	0,950 53	0,951 54	0,952 54	0,953 52	0,954 49
1,7	0,955 43	0,956 37	0,957 28	0,958 18	0,959 07	0,959 94	0,960 80	0,961 64	0,962 46	0,963 27
1,8	0,964 07	0,964 85	0,965 62	0,966 38	0,967 12	0,967 84	0,968 56	0,969 26	0,969 95	0,970 62
1,9	0,971 28	0,971 93	0,972 57	0,973 20	0,973 81	0,974 41	0,975 00	0,975 58	0,976 15	0,976 70
2,0	0,977 25	0,977 78	0,978 31	0,978 82	0,979 32	0,979 82	0,980 30	0,980 77	0,981 24	0,981 69
2,1	0,982 14	0,982 57	0,983 00	0,983 41	0,983 82	0,984 22	0,984 61	0,985 00	0,985 37	0,985 74
2,2	0,986 10	0,986 45	0,986 79	0,987 13	0,987 45	0,987 78	0,988 09	0,988 40	0,988 70	0,988 99

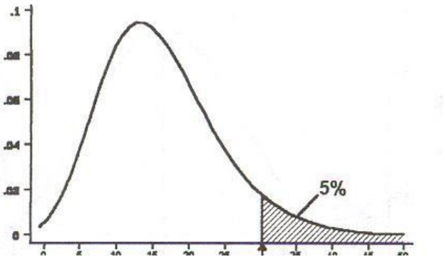
Tab. č. 2 Distribuční funkce *F(u)* normovaného normálního rozdělení – *3. pokračování*

u	0,00	0, 01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,3	0,989 28	0,989 56	0,989 83	0,9^{2}0 097	0,9^{2}0 358	0,9^{2}0 613	0,9^{2}0 863	0,9^{2}1 106	0,9^{2}1 344	0,9^{2}1 576
2,4	0,9^{2}1 802	0,9^{2}2 024	0,9^{2}2 240	0,9^{2}2 451	0,9^{2}2 656	0,9^{2}2 857	0,9^{2}3 053	0,9^{2}3 244	0,9^{2}3 431	0,9^{2}3 613
2,5	0,9^{2}3 790	0,9^{2}3 963	0,9^{2}4 132	0,9^{2}4 297	0,9^{2}4 457	0,9^{2}4 614	0,9^{2}4 766	0,9^{2}4 015	0,9^{2}5 060	0,9^{2}5 201
2,6	0,9^{2}5 339	0,9^{2}5 473	0,9^{2}5 604	0,9^{2}5 731	0,9^{2}5 855	0,9^{2}5 975	0,9^{2}6 093	0,9^{2}6 207	0,9^{2}6 319	0,9^{2}6 427
2,7	0,9^{2}6 533	0,9^{2}6 636	0,9^{2}6 736	0,9^{2}6 833	0,9^{2}6 928	0,9^{2}7 020	0,9^{2}7 110	0,9^{2}7 197	0,9^{2}7 282	0,9^{2}7 365
2,8	0,9^{2}7 445	0,9^{2}7 523	0,9^{2}7 599	0,9^{2}7 673	0,9^{2}7 744	0,9^{2}7 814	0,9^{2}7 882	0,9^{2}7 948	0,9^{2}8 012	0,9^{2}8 074
2,9	0,9^{2}8 134	0,9^{2}8 193	0,9^{2}8 250	0,9^{2}8 305	0,9^{2}8 359	0,9^{2}8 411	0,9^{2}8 462	0,9^{2}8 511	0,9^{2}8 559	0,9^{2}8 605
3,0	0,9^{2}8 650	0,9^{2}8 694	0,9^{2}8 736	0,9^{2}8 777	0,9^{2}8 818	0,9^{2}8 856	0,9^{2}8 893	0,9^{2}8 930	0,9^{2}8 965	0,9^{2}8 999
3,1	0,9^{3}0 324	0,9^{3}0 646	0,9^{3}0 957	0,9^{3}1 260	0,9^{3}1 553	0,9^{3}1 836	0,9^{3}2 112	0,9^{3}2 378	0,9^{3}2 636	0,9^{3}2 886
3,2	0,9^{3}3 129	0,9^{3}3 363	0,9^{3}3 590	0,9^{3}3 810	0,9^{3}4 024	0,9^{3}4 230	0,9^{3}4 429	0,9^{3}4 623	0,9^{3}4 810	0,9^{3}4 991
3,3	0,9^{3}5 166	0,9^{3}5 335	0,9^{3}5 499	0,9^{3}5 658	0,9^{3}5 811	0,9^{3}5 959	0,9^{3}6 103	0,9^{3}6 242	0,9^{3}6 376	0,9^{3}6 505
3,4	0,9^{3}6 631	0,9^{3}6 752	0,9^{3}6 869	0,9^{3}6 982	0,9^{3}7 091	0,9^{3}7 197	0,9^{3}7 299	0,9^{3}7 398	0,9^{3}7 493	0,9^{3}7 585
3,5	0,9^{3}7 674	0,9^{3}7 759	0,9^{3}7 842	0,9^{3}7 922	0,9^{3}7 999	0,9^{3}8 074	0,9^{3}8 146	0,9^{3}8 215	0,9^{3}8 282	0,9^{3}8 347
3,6	0,9^{3}8 409	0,9^{3}8 469	0,9^{3}8 527	0,9^{3}8 583	0,9^{3}8 637	0,9^{3}8 689	0,9^{3}8 739	0,9^{3}8 787	0,9^{3}8 834	0,9^{3}8 879
3,7	0,9^{3}8 922	0,9^{3}8 964	0,9^{4}0 039	0,9^{4}0 426	0,9^{4}0 739	0,9^{4}1 158	0,9^{4}1 504	0,9^{4}1 838	0,9^{4}2 159	0,9^{4}2 468
3,8	0,9^{4}2 765	0,9^{4}3 052	0,9^{4}3 327	0,9^{4}3 593	0,9^{4}3 848	0,9^{4}4 094	0,9^{4}4 331	0,9^{4}4 558	0,9^{4}4 777	0,9^{4}4 988
3,9	0,9^{4}5 190	0,9^{4}5 385	0,9^{4}5 573	0,9^{4}5 573	0,9^{4}5 926	0,9^{4}6 092	0,9^{4}6 253	0,9^{4}6 406	0,9^{4}6 554	0,9^{4}6 690
4,0	0,9^{4}6 833	0,9^{4}6 964	0,9^{4}7 090	0,9^{4}7 211	0,9^{4}7 327	0,9^{4}7 439	0,9^{4}7 546	0,9^{4}7 649	0,9^{4}7 748	0,9^{4}7 843
4,1	0,9^{4}7 934	0,9^{4}8 022	0,9^{4}8 106	0,9^{4}8 186	0,9^{4}8 263	0,9^{4}8 338	0,9^{4}8 409	0,9^{4}8 477	0,9^{4}8 542	0,9^{4}8 605
4,2	0,9^{4}8 665	0,9^{4}8 723	0,9^{4}8 778	0,9^{4}8 832	0,9^{4}8 882	0,9^{4}8 931	0,9^{4}8 978	0,9^{5}0 226	0,9^{5}0 655	0,9^{5}1 066
4,3	0,9^{5}1 460	0,9^{5}1 837	0,9^{5}2 199	0,9^{5}2 545	0,9^{5}2 876	0,9^{5}3 193	0,9^{5}3 497	0,9^{5}3 788	0,9^{5}4 066	0,9^{5}4 332
4,4	0,9^{5}4 587	0,9^{5}4 831	0,9^{5}5 065	0,9^{5}5 288	0,9^{5}5 502	0,9^{5}5 706	0,9^{5}5 902	0,9^{5}6 089	0,9^{5}6 268	0,9^{5}6 439
4,5	0,9^{5}6 602	0,9^{5}6 759	0,9^{5}6 908	0,9^{5}7 051	0,9^{5}7 187	0,9^{5}7 318	0,9^{5}7 442	0,9^{5}7 561	0,9^{5}7 675	0,9^{5}7 784
4,6	0,9^{5}7 888	0,9^{5}7 987	0,9^{5}8 081	0,9^{5}8 172	0,9^{5}8 258	0,9^{5}8 340	0,9^{5}8 419	0,9^{5}8 494	0,9^{5}8 566	0,9^{5}8 634
4,7	0,9^{5}8 699	0,9^{5}8 761	0,9^{5}8 821	0,9^{5}8 877	0,9^{5}8 931	0,9^{5}8 983	0,9^{6}0 320	0,9^{6}0 789	0,9^{6}1 235	0,9^{6}1 661
4,8	0,9^{6}2 067	0,9^{6}2 453	0,9^{6}2 822	0,9^{6}3 173	0,9^{6}3 508	0,9^{6}3 827	0,9^{6}4 131	0,9^{6}4 420	0,9^{6}4 496	0,9^{6}4 958
4,9	0,9^{6}5 208	0,9^{6}5 446	0,9^{6}5 673	0,9^{6}5 889	0,9^{6}6 094	0,9^{6}6 289	0,9^{6}6 475	0,9^{6}6 652	0,9^{6}6 821	0,9^{6}6 981

Tab. č. 3 Kvantily $t_{1-\alpha/2}$ (ν) Studentova *t* rozdělení

St. volnosti ν	0,80	0,90	0,95	0,975	0,9875	0,995
1	1,376	3,078	6,314	12,706	25,452	63,657
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,205	9,925
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,176	5,841
4	,941	1,533	2,132	2,776	3,495	4,604
5	,920	1,476	2,015	2,571	3,163	4,032
6	,906	1,440	1,943	2,447	2,969	3,707
7	,896	1,415	1,895	2,365	2,841	3,499
8	,889	1,397	1,860	2,306	2,752	3,355
9	,883	1,383	1,833	2,262	2,685	3,250
10	,879	1,372	1,812	2,228	2,634	3,169
11	,876	1,363	1,796	2,201	2,593	3,106
12	,873	1,356	1,782	2,179	2,560	3,055
13	,870	1,350	1,771	2,160	2,533	3,012
14	,868	1,345	1,761	2,145	2,510	2,977
15	,866	1,341	1,753	2,131	2,490	2,947
16	,865	1,337	1,746	2,120	2,473	2,921
17	,863	1,333	1,740	2,110	2,458	2,898
18	,862	1,330	1,734	2,101	2,445	2,878
19	,861	1,328	1,729	2,093	2,433	2,861
20	,860	1,325	1,725	2,086	2,423	2,845
21	,859	1,323	1,721	2,080	2,414	2,831
22	,858	1,321	1,717	2,074	2,406	2,819
23	,858	1,319	1,714	2,069	2,398	2,807
24	,857	1,318	1,711	2,064	2,391	2,797
25	,856	1,316	1,708	2,060	2,385	2,787
26	,856	1,315	1,706	2,056	2,379	2,779
27	,855	1,314	1,703	2,052	2,373	2,771
28	,855	1,313	1,701	2,048	2,368	2,763
29	,854	1,311	1,699	2,045	2,364	2,756
30	,854	1,310	1,697	2,042	2,360	2,750
35	,852	1,306	1,690	2,030	2,342	2,724
40	,851	1,303	1,684	2,021	2,329	2,704
45	,850	1,301	1,680	2,014	2,319	2,690
50	,849	1,299	1,676	2,008	2,310	2,678
55	,849	1,297	1,673	2,004	2,304	2,669
60	,848	1,296	1,671	2,000	2,299	2,660
70	,847	1,294	1,667	1,994	2,290	2,648
80	,847	1,293	1,665	1,989	2,284	2,638
90	,846	1,291	1,662	1,986	2,279	2,631
100	,846	1,290	1,661	1,982	2,276	2,625
120	,845	1,289	1,658	1,980	2,270	2,617
∞	,8416	1,2816	1,6448	1,9600	2,2414	2,5758

Tab. č. 4a Kritické hodnoty χ^2 rozdělení (pravý konec rozdělení)



ν	Kvantily 1-α:				
	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	3,84	5,02	6,63	7,88	10,81
2	5,99	7,38	9,21	10,60	13,80
3	7,81	9,35	11,34	12,84	16,26
4	9,49	11,14	13,28	14,86	18,46
5	11,07	12,83	15,08	16,75	20,52
6	12,59	14,45	16,81	18,54	22,46
7	14,07	16,01	18,47	20,28	24,35
8	15,51	17,53	20,09	21,95	26,10
9	16,92	19,02	21,67	23,59	27,86
10	19,31	20,48	23,21	25,19	29,58
11	19,68	21,92	24,72	26,75	31,29
12	21,03	23,34	26,22	28,30	32,92
13	22,36	24,74	27,69	29,82	34,54
14	23,69	26,12	29,14	31,32	36,12
15	25,00	27,49	30,57	32,81	37,71
16	26,30	28,84	32,00	34,27	39,24
17	27,59	30,19	33,41	35,72	40,78
18	28,87	31,53	34,80	37,16	42,32
19	30,14	32,85	36,19	38,58	43,81
20	31,41	34,17	37,57	39,99	45,31
21	32,67	35,48	38,94	41,40	46,80
22	33,92	36,78	40,29	42,80	48,25
23	35,17	38,08	41,64	44,19	49,75
24	36,41	39,36	42,97	45,56	51,15
25	37,65	40,65	44,31	46,93	52,65
26	38,88	41,92	45,64	48,30	54,05
27	40,11	43,20	46,97	49,65	55,46
28	41,34	44,46	48,28	51,00	56,87
29	42,56	45,72	49,59	52,34	58,27
30	43,77	46,98	50,89	53,68	59,68
35	49,80	53,20	57,34	60,27	66,62
40	55,76	59,34	63,69	66,76	73,39
50	67,51	71,42	76,16	79,50	86,66
60	79,08	83,30	88,38	91,96	99,58
70	90,53	95,02	100,43	104,22	112,32
80	101,88	106,63	112,32	116,32	124,80
100	124,34	129,56	135,81	140,16	149,41

Tab. č. 4b Kritické hodnoty χ^2 rozdělení (levý konec rozdělení)

ν	Kvantily α :				
	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05
1	,000016	,000039	,00016	,00098	,0039
2	,0020	,010	,020	,051	,10
3	,024	,072	,12	,22	,35
4	,091	,21	,30	,48	,71
5	,21	,41	,55	,83	1,15
6	,38	,68	,87	1,24	1,64
7	,60	,99	1,24	1,69	2,17
8	,86	1,34	1,65	2,18	2,73
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23
13	2,61	3,57	4,11	5,01	5,89
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57
15	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,12
20	5,92	7,43	8,26	9,59	10,85
21	6,45	8,03	8,90	10,28	11,59
22	6,99	8,64	9,54	10,98	12,34
23	7,54	9,26	10,20	11,69	13,09
24	809	9,89	10,86	12,40	13,85
25	8,66	10,52	11,52	13,12	14,61
26	9,23	11,16	12,20	13,84	15,38
27	9,80	11,81	12,88	14,57	16,15
28	10,39	12,46	13,57	15,31	16,93
29	10,99	13,13	14,25	16,05	17,71
30	11,58	13,79	14,95	16,79	18,49
35	14,68	17,19	18,51	20,57	22,46
40	17,93	20,71	22,16	24,43	26,51
50	24,68	27,99	29,71	32,36	34,76
60	31,73	35,53	37,49	40,48	43,19
70	39,02	43,28	45,44	48,76	51,74
80	46,49	51,17	53,54	57,15	60,39
100	61,92	67,32	70,07	74,22	77,93

Tab. č. 5 Kritické hodnoty $T_{n;\alpha} - T_{1;\alpha}$ pro Grubbsův test

n \ α	0,05	0,01	n \ α	0,05	0,01
3	1,412	1,414	15	2,493	2,800
4	1,689	1,723	16	2,523	2,837
5	1,869	1,955	17	2,551	2,871
6	1,996	2,130	18	2,577	2,903
7	2,093	2,265	19	2,600	2,932
8	2,172	2,374	20	2,623	2,959
9	2,237	2,464	21	2,644	2,984
10	2,294	2,540	22	2,664	3,008
11	2,343	2,606	23	2,683	3,030
12	2,387	2,663	24	2,701	3,051
13	2,426	2,714	25	2,717	3,071
14	2,461	2,759			

Tab. č. 6 Kritické hodnoty $Q_{n;\alpha} - Q_{1;\alpha}$ pro Dixonův test

n \ α	0,05	0,01	n \ α	0,05	0,01
3	0,941	0,988	17	0,320	0,416
4	0,765	0,889	18	0,313	0,407
5	0,642	0,780	19	0,306	0,398
6	0,560	0,698	20	0,300	0,391
7	0,507	0,637	21	0,295	0,384
8	0,468	0,590	22	0,290	0,378
9	0,437	0,555	23	0,285	0,372
10	0,412	0,527	24	0,281	0,367
11	0,392	0,502	25	0,277	0,362
12	0,376	0,482	26	0,273	0,357
13	0,361	0,465	27	0,269	0,353
14	0,349	0,450	28	0,266	0,349
15	0,338	0,438	29	0,263	0,345
16	0,329	0,426	30	0,260	0,341

Tab. č. 7 Kvantily $F_{0,975}$ (ν_V, ν_M) Fisher-Snedecorova rozdělení **(α = 0,05)**

ν_M \ ν_V	Počet stupňů volnosti čitatele								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28
2	38,506	39,000	39,165	39,248	39,298	39,331	39,355	39,373	39,387
3	17,443	16,044	15,439	15,101	14,885	14,735	14,624	14,540	14,473
4	12,218	10,649	9,979	9,605	9,365	9,197	9,074	8,980	8,905
5	10,007	8,434	7,764	7,388	7,146	6,978	6,853	6,757	6,681
6	8,813	7,260	6,599	6,227	5,988	5,820	5,696	5,600	5,523
7	8,073	6,542	5,890	5,523	5,285	5,119	4,995	4,899	4,823
8	7,571	6,060	5,416	5,053	4,817	4,652	4,529	4,433	4,357
9	7,209	5,715	5,078	4,718	4,484	4,320	4,197	4,102	4,026
10	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,950	3,855	3,779
11	6,724	5,256	4,630	4,275	4,044	3,881	3,759	3,664	3,588
12	6,554	5,096	4,474	4,121	3,891	3,728	3,607	3,512	3,436
13	6,414	4,965	4,347	3,996	3,767	3,604	3,483	3,388	3,312
14	6,298	4,857	4,242	3,892	3,663	3,501	3,380	3,285	3,209
15	6,200	4,765	4,153	3,804	3,576	3,415	3,293	3,199	3,123
16	6,115	4,687	4,077	3,729	3,502	3,341	3,219	3,125	3,049
17	6,042	4,619	4,011	3,665	3,438	3,277	3,156	3,061	2,985
18	5,978	4,560	3,954	3,608	3,382	3,221	3,100	3,005	2,929
19	5,922	4,508	3,903	3,559	3,333	3,172	3,051	2,956	2,880
20	5,872	4,461	3,859	3,515	3,289	3,128	3,007	2,913	2,837
21	5,827	4,420	3,819	3,475	3,250	3,090	2,969	2,874	2,798
22	5,786	4,383	3,783	3,440	3,215	3,055	2,934	2,839	2,763
23	5,750	4,349	3,751	3,408	3,184	3,023	2,902	2,808	2,731
24	5,717	4,319	3,721	3,379	3,155	2,995	2,874	2,779	2,703
25	5,686	4,291	3,694	3,353	3,129	2,969	2,848	2,753	2,677
26	5,659	4,266	3,670	3,329	3,105	2,945	2,824	2,729	2,653
27	5,633	4,242	3,647	3,307	3,083	2,923	2,802	2,707	2,631
28	5,610	4,221	3,626	3,286	3,063	2,903	2,782	2,687	2,611
29	5,588	4,201	3,607	3,267	3,044	2,884	2,763	2,669	2,592
30	5,568	4,182	3,589	3,250	3,027	2,867	2,746	2,651	2,575
40	5,424	4,051	3,463	3,126	2,904	2,744	2,624	2,529	2,452
60	5,286	3,925	3,343	3,008	2,786	2,627	2,507	2,412	2,334
120	5,152	3,805	3,227	2,894	2,674	2,515	2,395	2,299	2,222
∞	5,024	3,689	3,116	2,786	2,567	2,408	2,288	2,192	2,114

ν_V – stupně volnosti výběru s větším rozptylem, ν_M - stupně volnosti výběru s menším rozptylem

Tab. č. 8 Kritické hodnoty Mann-Whitneyova testu

Hladina významnosti α = 0,05									
	n_2								
n_1	11								
11	30,3	12							
12	33,8	37,7	13						
13	37,3	41,6	46,0	14					
14	40,8	45,5	50,3	55,0	15				
15	44,4	49,5	54,6	59,7	65,0	16			
16	48,0	53,4	59,0	64,5	70,1	75,7	17		
17	51,5	57,4	63,3	69,3	75,3	81,3	87,3	18	
18	55,0	61,3	67,7	74,1	80,4	86,9	93,3	99,7	19
19	58,6	65,3	72,1	78,9	85,6	92,5	99,3	106,2	113,0

Hladina významnosti α = 0,01									
	n_2								
n_1	11								
11	21,8	12							
12	24,7	27,9	13						
13	27,6	31,2	34,9	14					
14	30,5	34,5	38,5	42,6	15				
15	33,5	37,8	42,2	46,6	51,1	16			
16	36,4	41,1	45,9	50,7	55,5	60,3	17		
17	39,4	44,5	49,6	54,8	60,0	65,2	70,5	18	
18	42,4	47,8	53,4	58,9	64,5	70,1	75,7	81,2	19
19	45,4	51,2	57,1	63,0	69,0	75,0	81,0	87,0	93,1

Tab. č. 9 Kritické hodnoty pro Wilcoxonův test

n	**0,05**	**0,01**	**0,001**
6	0,6	-	-
7	2,1	-	-
8	3,7	0,3	-
9	5,5	1,6	-
10	8,1	3,1	-
11	10,7	5,1	-
12	13,8	7,2	1,0
13	17,2	9,8	2,5
14	21,1	12,7	4,4
15	25,3	15,9	6,5
16	29,9	19,5	9,0
17	34,9	23,4	11,7
18	40,3	27,7	14,8
19	46,1	32,4	18,2
20	52,3	37,4	21,9
21	59,0	42,7	26,0
22	66,0	48,6	30,4
23	73,4	54,8	35,2
24	81,3	61,3	40,3
25	89,5	68,3	45,8
30	137,1	109,0	78,5
35	195,3	159,7	120,5
40	264,2	220,4	172,1
45	343,9	291,5	233,3
50	434,5	373,0	304,5

Tab. č. 10 Kritické hodnoty pro znaménkový test

Počet párů	Hladina významnosti (α)		
n	**0,01**	**0,05**	**0,10**
5	-	-	0
6	-	0	0
7	-	0	0
8	0	0	1
9	0	1	1
10	0	1	1
11	0	1	2
12	1	2	2
13	1	2	3
14	1	2	3
15	2	3	3
16	2	3	4
17	2	4	4
18	3	4	5
19	3	4	5
20	3	5	5

Tab. č. 11 Kritické hodnoty Spearmanova korelačního koeficientu r_{Sp}

n	$\alpha(2)$: **0,20** $\alpha(1)$: **0,10**	**0,10** **0,05**	**0,05** **0,025**	**0,02** **0,01**	**0,01** **0,005**	**0,005** **0,0025**	**0,002** **0,001**
4	1,000	1,000					
5	0,800	0,900	1,000	1,000			
6	0,657	0,829	0,886	0,943	1,000	1,000	
7	0,571	0,714	0,786	0,893	0,929	0,964	1,000
8	0,524	0,643	0,738	0,833	0,881	0,905	0,952
9	0,483	0,600	0,700	0,783	0,833	0,867	0,917
10	0,455	0,564	0,648	0,745	0,794	0,830	0,879
11	0,427	0,536	0,618	0,709	0,755	0,800	0,845
12	0,406	0,503	0,587	0,678	0,727	0,769	0,818
13	0,385	0,484	0,560	0,648	0,703	0,747	0,791
14	0,367	0,464	0,538	0,626	0,679	0,723	0,771
15	0,354	0,446	0,521	0,604	0,654	0,700	0,750
16	0,341	0,429	0,503	0,582	0,635	0,679	0,729
17	0,328	0,414	0,485	0,566	0,615	0,662	0,713
18	0,317	0,401	0,472	0,550	0,600	0,643	0,695
19	0,309	0,391	0,460	0,535	0,584	0,628	0,677
20	0,299	0,380	0,447	0,520	0,570	0,612	0,662
21	0,292	0,370	0,435	0,508	0,556	0,599	0,648
22	0,284	0,361	0,425	0,496	0,544	0,586	0,634
23	0,278	0,353	0,415	0,486	0,532	0,573	0,622
24	0,271	0,344	0,406	0,476	0,521	0,562	0,610
25	0,265	0,337	0,398	0,466	0,511	0,551	0,598
26	0,259	0,331	0,390	0,457	0,501	0,541	0,587
27	0,255	0,324	0,382	0,448	0,491	0,531	0,577
28	0,250	0,317	0,375	0,440	0,483	0,522	0,567
29	0,245	0,312	0,368	0,433	0,475	0,513	0,558
30	0,240	0,306	0,362	0,425	0,467	0,504	0,549
31	0,236	0,301	0,356	0,418	0,459	0,496	0,541
32	0,232	0,296	0,350	0,412	0,452	0,489	0,533
33	0,229	0,291	0,345	0,405	0,446	0,482	0,525
34	0,225	0,287	0,340	0,399	0,439	0,475	0,517
35	0,222	0,283	0,335	0,394	0,433	0,468	0,510
36	0,219	0,279	0,330	0,388	0,427	0,462	0,504
37	0,216	0,275	0,325	0,383	0,421	0,456	0,497
38	0,212	0,271	0,321	0,378	0,415	0,450	0,491
39	0,210	0,267	0,317	0,373	0,410	0,444	0,485
40	0,207	0,264	0,313	0,368	0,405	0,439	0,479
41	0,204	0,261	0,309	0,364	0,400	0,433	0,473
42	0,202	0,257	0,305	0,359	0,395	0,428	0,468
43	0,199	0,254	0,301	0,355	0,391	0,423	0,463
44	0,197	0,251	0,298	0,351	0,386	0,419	0,458
45	0,194	0,248	0,294	0,347	0,382	0,414	0,453
46	0,192	0,246	0,291	0,343	0,378	0,410	0,448
47	0,190	0,243	0,288	0,340	0,374	0,405	0,443
48	0,188	0,240	0,285	0,336	0,370	0,401	0,439
49	0,186	0,238	0,282	0,333	0,366	0,397	0,434
50	0,184	0,235	0,279	0,329	0,363	0,393	0,430
51	0,182	0,233	0,276	0,326	0,359	0,390	0,426
52	0,180	0,231	0,274	0,323	0,356	0,386	0,422
53	0,179	0,228	0,271	0,320	0,352	0,382	0,418
54	0,177	0,226	0,268	0,317	0,349	0,379	0,414
55	0,175	0,224	0,266	0,314	0,346	0,375	0,411

Literatura

Armitage, P., Berry, G., Matthews, J.N.S.: Statistical methods in medical research. Blackwell Publishing, Oxford UK 2002, 814 s.

Ashcroft, S., Pereira, Ch.: Practical Statistics for the Biological Sciences. PALGRAVE MACMILLAN, New York, N,Y, 2003, 167 s.

Benedík, J.: Biostatistika. Univerzita J. E. Purkyně (MU), Brno 1983, 233 s.

Carvounis, Ch.: Handbook of Biostatistics. PARTHENON PUBLISHING, New York, USA 2000, 103 s.

Cyhelský L., Kahounová J., Hindls R.: Elementární statistická analýza, Management Press, Praha 1999, 319 s.

Glantz, S. A.: Primer of Biostatistics. McGRAW-HILL, N.Y. USA 2005, 520 s.

Havránek, T.: Statistika pro biologické a lékařské vědy. Academia, Praha 1993, 478 s.

Hanousek J., Charamza P.: Moderní metody zpracování dat – matematická statistika pro každého. GRADA-Educa 99, Praha 1992, 216 s.

Hendl, J.: Přehled statistických metod zpracování dat. Portál s.r.o., Praha 2004, 583 s.

Klemera, P., Klemerová, V.: Základy aplikované statistiky pro studující farmacie. Karolinum, Praha 1993, 98 s.

Kubín, I.: Statistické metody pro veterinární lékaře. SVS, Ústav veterinární osvěty, Pardubice 1977, 136 s.

Meloun, M., Militký, J.: Statistické zpracování experimentálních dat. Edice PLUS, Praha 1994, 839 s.

Reisenauer, R.: Metody matematické statistiky. Polytechnická knižnice, Praha 1965, 207 s.

Riffenburgh, R. H.: Statistics in medicine. ACADEMIC PRESS, San Diego, California USA 1999, 581 s.

Roth, Z. a kol..: Statistické metody v experimentální medicíně. SZN, Praha 1960, 590 s.

Svoboda H.: Moderní statistika. SVOBODA, Praha 1977, 351 s.

Zar, J. H.: Biostatistical Analysis. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.Y. 1999, 663 s.

WWW zdroje (pro další studium)

http://www.texasoft.com/tutindex.html

http://www.stats.gla.ac.uk/steps/glossary/index.html

http://faculty.vassar.edu/lowry/webtext.html

http://www.le.ac.uk/bl/gat/virtualfc/Stats/compkey.html

http://www.statsoft.com/textbook/stathome.html

http://www.rba.co.uk/sources/stats.htm

Statistický software (on-line, free)

http://freestatistics.altervista.org/en/stat.php

http://statpages.org/javasta2.html#Freebies

http://home.clara.net/sisa/

http://faculty.vassar.edu/lowry/VassarStats.html

http://www.ub.edu/dnasp/

http://www.dorak.info/mtd/glosstat.html

http://www.deakin.edu.au/~rodneyc/software.htm

Statistický software (komerční)

http://www.unistat.cz/index.php

http://www.statsoft.cz/page/index.php

http://www.spss.cz/sw_mbas.htm

http://www.analystsoft.com/en/products/statplus/

http://meloun.upce.cz/adstat.html

http://www.systat.com/products/Systat/

http://www.statistixl.com/

http://www.ncss.com/ncsswin.html?gclid=CKzf_4yg8I8CFQ5PMAodJ0kjFA